

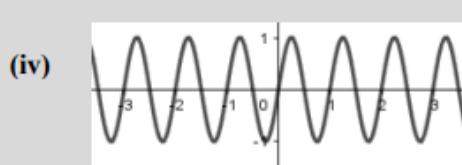
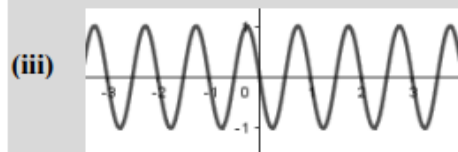
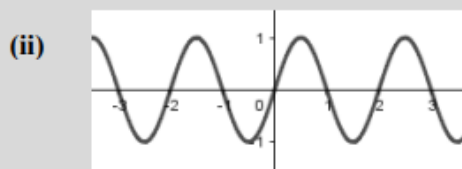
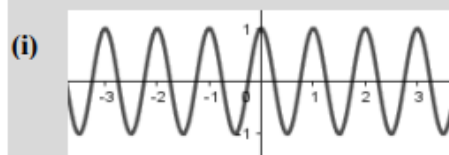
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

22003. Δίδεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu(2\pi x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$.

β) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

γ) Μία από τις παρακάτω τέσσερις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



20807. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής.

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f(x) = -2\eta\mu x$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

15062. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(ax)$, $x \in \mathbb{R}$ και $a, \rho > 0$.

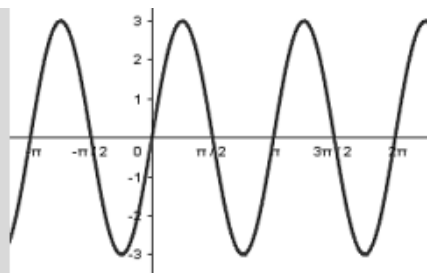
α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περιόδότης, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς a και ρ .

Έστω $\rho = 3$ και $a = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.



15689. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται, για τις μη αρνητικές τιμές του x , η γραφική της παράσταση.

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, τότε:

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για τις αρνητικές τιμές του x .

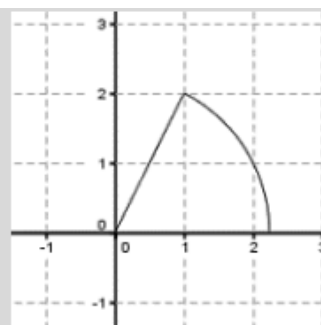
β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της.

Για ποιες τιμές του x προκύπτουν οι ακρότατες τιμές της;

γ) Έστω θ ένας αριθμός με $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i. $\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\nu\theta$.

ii. $f(\eta\mu\theta)$ και $f(\sigma\upsilon\nu\theta)$

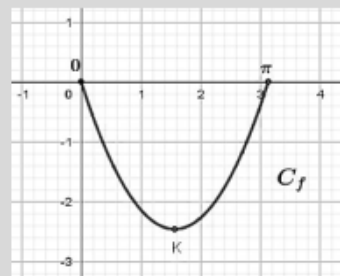


ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

15095. Οι εξισώσεις των γραμμών που αποτελούν την περίμετρο μιας επίπεδης μεμβράνης όπως φαίνεται κάτω από ένα μικροσκόπιο, είναι: $x = 0$, $y = x^2 - \pi x$, $y = \frac{1}{2} + \eta\mu x$ και $x = 3$.

Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο.

α) i. Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \pi x$, $x \in [0, \pi]$ είναι το τμήμα της παραβολής που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4}\right)$.



Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g(x) = \frac{1}{2} + \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

i. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων και τα διαστήματα μονοτονίας τους.

β) Να βρείτε την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

γ) Να βρείτε τις ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου πλακιδίου.

15992. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \eta\mu(ax)$, $g(x) = \eta\mu(\omega x)$ όπου $\omega, \rho > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ , ω , αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

β) i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x)$, $x \in [0, \pi]$.

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu \frac{5\pi}{9} > \eta\mu \frac{10\pi}{9}$.

20870. Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι 5,8 μέτρα και συμβαίνει στις 3:00 π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 2,6 μέτρα και συμβαίνει στις 9:00 π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = \alpha \eta\mu(\omega t) + \beta$, με $\alpha, \omega, \beta > 0$ και $0 \leq t \leq 24$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , ω και β .

β) Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$,

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + 4,2$, με $0 \leq t \leq 24$.

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;

iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4,2 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;