

• •

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ABΓΔ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔΕΖΗ έχει πλευρά 1.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 2$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

(Μονάδες 7)

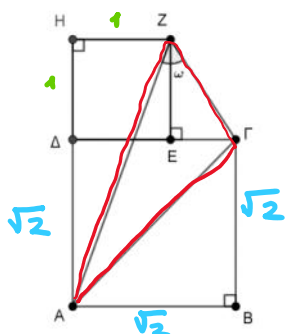
1. $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

(Μονάδες 7)

2. $ΓΖ^2 = 4 - 2\sqrt{2}$.

(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $\hat{AZΓ} = \omega$.



α) π.θ στο $\hat{ABΓ}$

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 \Leftrightarrow$$

$$ΑΓ^2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{ΑΓ = 2}$$

β) π.θ στο $\hat{AHZ}$

$$ΑΖ^2 = ΑΗ^2 + ΗΖ^2 \Leftrightarrow ΑΖ^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 + 1^2 \Leftrightarrow$$

$$ΑΖ^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 \Leftrightarrow \boxed{ΑΖ^2 = 4 + 2\sqrt{2}}$$

$$ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ = \sqrt{2} - 1.$$

γ) π.θ στο $\hat{ZΕΓ}$

$$ΖΓ^2 = ΕΓ^2 + ΖΕ^2 \Leftrightarrow ΖΓ^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 + 1^2 \Leftrightarrow ΖΓ^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 1 \Leftrightarrow \boxed{ΖΓ^2 = 4 - 2\sqrt{2}}$$

δ) Στο τρ. $\hat{AZΓ}$ από νόμο συνημιτόνων έχουμε

$$ΑΓ^2 = ΑΖ^2 + ΖΓ^2 - 2 \cdot ΑΖ \cdot ΖΓ \cdot \cos \omega \Leftrightarrow$$

$$4 = 4 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \cos \omega \Leftrightarrow$$

$$4 = 8 - 2 \cdot \sqrt{(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})} \cdot \cos \omega \Leftrightarrow$$

$$4 = 8 - 2 \cdot \sqrt{16 - 8} \cdot \cos \omega \Leftrightarrow 4 = 8 - 2\sqrt{8} \cdot \cos \omega \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{8} \cdot \cos \omega = 4 \Leftrightarrow \cos \omega = \frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Άρα } \boxed{\omega = 45^\circ}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB = 8$, $ΒΓ = 7$ και $\hat{A} = 60^\circ$.

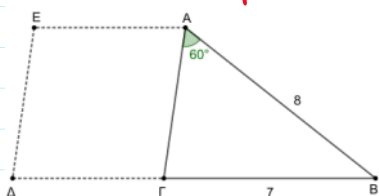
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 3$ ή $ΑΓ = 5$.

(Μονάδες 6)

β) Έστω ότι το τρίγωνο ABΓ είναι οξυγώνιο όπως στο παρακάτω σχήμα.

ι. Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 5$.

(Μονάδες 6)



$$\text{Άρα } ΑΓ = 5 \text{ ή } ΑΓ = 3$$

β) Αν $ΑΓ = 3$ τότε οι πλευρές του ABΓ $\begin{cases} ΑΓ = 3 \\ ΑΒ = 8 \\ ΒΓ = 7 \end{cases}$ (Είδος)

$$\bullet ΑΒ^2 = 8^2 = 64$$

$$\bullet ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = 9 + 49 = 58$$

α) Στο τρ. $\hat{ABΓ}$ από νόμο συνημιτόνων είναι:

$$ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2 - 2 \cdot ΑΓ \cdot ΑΒ \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$49 = ΑΓ^2 + 64 - 2 \cdot ΑΓ \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$49 = ΑΓ^2 + 64 - 8ΑΓ \Leftrightarrow$$

$$ΑΓ^2 - 8ΑΓ + 15 = 0$$

$$\text{Θέτω } k = ΑΓ. \text{ Άρα } k^2 - 8k + 15 = 0 \quad \Delta = 64 - 60 = 4, \quad k = \frac{8 \pm 2}{2} < 3.$$

$$\bullet AB^2 = 8^2 = 64$$

$$\bullet AG^2 + BG^2 = 9 + 49 = 58$$

Άρα $AB^2 > AG^2 + BG^2$. Άρα $\triangle ABG$ οξυγώνιο με οξυγώνιο $\hat{G}$, άτονο

Αν $AG = 5$ τότε οι πλευρές του $\triangle ABG$ $\begin{cases} AG = 5 \\ AB = 8 \\ BG = 7 \end{cases}$ (Είδος:)

$$\bullet AB^2 = 8^2 = 64$$

$$\bullet AG^2 + BG^2 = 25 + 49 = 74$$

Άρα $AB^2 < AG^2 + BG^2$. Άρα $\triangle ABG$ οξυγώνιο.

$$\text{Άρα } \boxed{AG = 5}$$

ΘΕΜΑ 3

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του αν οι πλευρές του έχουν μήκη 6, 5, $\sqrt{37}$.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 6$, $AB = 5$ και $AG = \sqrt{37}$. Να βρείτε το μήκος της προβολής της πλευράς AB πάνω στην πλευρά $B\Gamma$.

(Μονάδες 15)

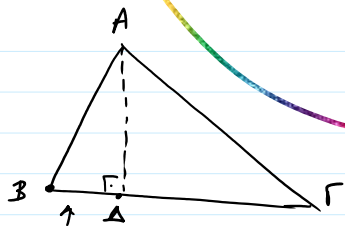
$$\alpha) \begin{cases} 6 = \sqrt{36} \\ 5 = \sqrt{25} \\ \sqrt{37} \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{37}^2 = 37$$

$$\bullet 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$$

Άρα $37 < 61$. Άρα τρίγωνο οξυγώνιο.

β)



Από Γενικευμένο Π.Θ είναι

$$AG^2 = AB^2 + BG^2 - 2 \cdot BG \cdot B\Delta \Leftrightarrow$$

$$37 = 25 + 36 - 12 \cdot B\Delta \Leftrightarrow$$

$$12B\Delta = 24 \Leftrightarrow \boxed{B\Delta = 2}$$