

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h = g \circ f$ αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία

$$\text{ισχύουν: } \begin{cases} x \in D_f \\ \text{και} \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ f(x) \in (0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ f(x) > 0 \end{cases} \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} x \in \mathbb{R}. \text{ Άρα } D_h = \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

β)

- i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $-x \in \mathbb{R}$. Για να είναι η συνάρτηση h περιττή αρκεί να αποδείξουμε ότι $h(-x) = -h(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $h(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2 + 1} - (-x)) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ και έτσι έχουμε:

$$h(-x) = -h(x) \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \Leftrightarrow$$

$$\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0 \Leftrightarrow \ln((\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln((\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 = 0, \text{ που ισχύει.}$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι περιττή.

- ii. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \cdot \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \cdot \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

Οπότε είναι $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα αφού είναι συνεχής και ισχύει

$h'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη (γν. φθίνουσα) είναι και “1-1”.

γ) Με $x > 0$ έχουμε:

$$h(x-1)+h\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow h(x-1)=-h(-\ln x)\overset{h}{\underset{\text{περιττή}}{\Leftrightarrow}}$$

$$h(x-1)=h(\ln x)\overset{h}{\underset{1-1}{\Leftrightarrow}}x-1=\ln x\Leftrightarrow x=1.$$