

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

- Η ευθεία $3x - y = 3$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση στο σημείο $K(1, f(1))$
- $f''(x) + f(x) = x^3 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- i) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$ και $f'(1) = 3$
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = (f(x) - x^3 + 1)^2 + (f'(x) - 3x^2)^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- iii) Να βρείτε τον τύπο της f και f'

Αν $f(x) = x^3 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε:

- iv) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}
- vi) Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το συμμετρικό σημείο του K ως προς την διχοτόμο των γωνιών $x\hat{O}y, x'\hat{O}y'$.
- viii) Ένα σημείο M κινείται πάνω στην C_f και η τετμημένη του $x(t) > 0$ με $x'(t) \neq 0$ για κάθε $t \geq 0$. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y'(t)$ του M είναι τριπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x'(t)$, την χρονική στιγμή t_0 που το σημείο διέρχεται από το K .