

Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

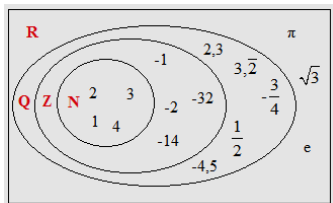
♦ Τα σύνολα των αριθμών

N Φυσικοί αριθμοί: 0,1,2,3,4,...

Z Ακέραιοι αριθμοί: 0, ±1, ±2, ...

Q Ρητοί αριθμοί: $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0$

R Πραγματικοί αριθμοί: Ρητοί και άρρητοι



♦ **Αντίθετοι αριθμοί** λέγονται οι αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν

♦ **Αντίστροφοι αριθμοί** λέγονται οι αριθμοί που έχουν γινόμενο ίσο με τη μονάδα.

- Το 0 δεν έχει αντίστροφο

Άρτιοι ακέραιοι $\alpha = 2\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Περιττοί ακέραιοι $\alpha = 2\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

♦ **Ιδιότητες**■ **Πρόσθεση:**

Αντιμεταθετική $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

Προσεταιριστική $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

Ουδέτερο στοιχείο $\alpha + 0 = \alpha$

Αντίθετος $\alpha + (-\alpha) = 0$

■ **Πολλαπλασιασμός**

Αντιμεταθετική $\alpha\beta = \beta\alpha$

Προσεταιριστική $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

Ουδέτερο στοιχείο $\alpha \cdot 1 = \alpha$

Αντίστροφος $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$

Επιμεριστική $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

♦ **Ισότητα-Ιδιότητες**

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = \beta + \delta \\ \alpha\gamma = \beta\delta \end{cases}$$

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$$

$$\text{Αν } \gamma \neq 0 \text{ τότε } \alpha\gamma = \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

$$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

$$\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

♦ **Δυνάμεις**

Η **δύναμη α^v** ορίζεται ως εξής:

- Αν $v \geq 2$ τότε

$$\alpha^v = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_v \text{ παράγοντες}$$

- Αν $v=1$, $\alpha^1 = \alpha$

- Αν $v=0$, $\alpha^0 = 1, \alpha \neq 0$

$$\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}, \alpha \neq 0, v \geq 1$$

♦ **Ιδιότητες δυνάμεων**

$$1. \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$$

$$2. \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$$

$$3. (\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$$

$$4. \alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha\beta)^{\kappa}$$

$$5. \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$$

♦ **Αξιοσημείωτες ταυτότητες**

■ **Ταυτότητα** λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

$$-- (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$-- (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$-- a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$-- (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$-- (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$-- a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$-- a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$-- (a+b+\gamma)^2 = a^2 + b^2 + \gamma^2 + 2ab + 2a\gamma + 2b\gamma$$

♦ **Ιδιότητες αναλογιών**

$$1. \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma, \beta\delta \neq 0$$

$$2. \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}, \beta\gamma \neq 0$$

$$3. \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}, \beta\delta \neq 0$$

$$4. \text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}, \beta\delta(\beta+\delta) \neq 0$$

• **Ευθεία απόδειξη:**

Ξεκινάμε από την υπόθεση (δεδομένα) και με μια σειρά κατάλληλων ισχυρισμών που στηρίζονται στις ιδιότητες των πράξεων, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

• **Απαγωγή σε άτοπο:**

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε και με μια σειρά κατάλληλων ισχυρισμών καταλήγουμε σε συμπέρασμα λανθασμένο (άτοπο)

Διάταξη πραγματικών αριθμών

♦ Ο αριθμός α είναι **μεγαλύτερος** του αριθμού β όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

Δηλαδή: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$.

♦ Ο αριθμός α είναι **μικρότερος** του αριθμού β όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός.

Δηλαδή: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$

♦ **Ισχύουν:**

1. Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$.

2. Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$.

3. Αν α, β ομόσημοι τότε $\alpha\beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$.

4. Αν α, β ετερόσημοι τότε $\alpha\beta < 0$, $\frac{\alpha}{\beta} < 0$.

5. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha^2 \geq 0$

6. $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$

7. $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

♦ **Βασικές Ιδιότητες Ανισοτήτων.**

1. Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$. (Μεταβατική Ιδιότητα)

2. Αν $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$ για κάθε αριθμό γ .

3. Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$. 4. Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$.

5. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

6. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί τότε αν $\alpha > \beta, \gamma > \delta$ τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$

7. Αν α, β θετικοί και n φυσικός $\neq 0$ i. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$. ii. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$.

8. Αν α, β ομόσημοι τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

9. $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς

10. Αν $\alpha > 0$ τότε $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$

♦ **Προσοχή:** Δεν αφαιρούμε, ούτε διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη

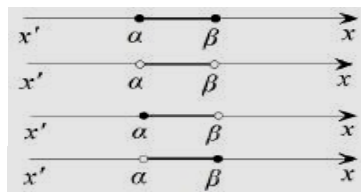
♦ **Διαστήματα**

Κλειστό διάστημα από α μέχρι β , $[\alpha, \beta]$ ή $\alpha \leq x \leq \beta$

Ανοικτό διάστημα από α μέχρι β , (α, β) ή $\alpha < x < \beta$

Ανοικτό δεξιά διάστημα $[\alpha, \beta)$ ή $\alpha \leq x < \beta$

Ανοικτό αριστερά διάστημα $(\alpha, \beta]$ ή $\alpha < x \leq \beta$



Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

♦ **Ορισμός:**

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α λέγεται ο ίδιος αριθμός α , αν είναι θετικός ή μηδέν και ο αντίθετός του αν είναι αρνητικός

Δηλαδή: $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases}$

Είναι:

1. $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$ 2. $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$

3. $|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \pm \beta$ 4. $|\alpha|^2 = \alpha^2$

♦ **Απόσταση αριθμών:** $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$

♦ **Ιδιότητες**

1. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ 2. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \beta \neq 0$

3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

4. $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta, \theta > 0$

5. $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta, \theta > 0$

6. $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \geq \theta$ ή $x \leq -\theta, \theta > 0$

7. $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Ρίζες πραγματικών αριθμών

♦ **Ορισμός**

Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον α .

Δηλαδή: $\sqrt{\alpha} = x \Leftrightarrow x^2 = \alpha, \alpha \geq 0$

• **Ιδιότητες**

1. $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ 2. $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$

3. $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

♦ $\sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^n = \alpha, \alpha \geq 0$

α. Αν $\alpha \geq 0$ τότε $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$

και $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$

β. Αν $\alpha, \beta \geq 0$

1. $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$ 2.

$\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}, \beta \neq 0$ 3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}} = \sqrt[n \cdot m]{\alpha}$

4. $\sqrt[n]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[n]{\alpha^{\mu}}^{\rho}$

♦ **Η εξίσωση $ax+b=0$**
 $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b$

❖ Αν $a \neq 0$, η εξίσωση έχει **μία ακριβώς λύση** την $x = -\frac{b}{a}$

❖ Αν $a=0$ και $b \neq 0$ η εξίσωση είναι **αδύνατη**

❖ Αν $a=0$ και $b=0$ η εξίσωση είναι **ταυτότητα**.

♦ **Παραμετρική εξίσωση**

Αν οι συντελεστές a και b εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων, η εξίσωση λέγεται **παραμετρική**

♦ **Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1^{ου} Βαθμού**

Για να λύσουμε εξισώσεις που δεν είναι της μορφής $ax=b$, τότε

• Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος (εκτός της μορφής $x^n=a$)

• Κάνουμε γινόμενο παραγόντων το 1^ο μέλος με παράγοντες της μορφής $ax+b$

• Εξισώνουμε κάθε παράγοντα με το μηδέν και λύνουμε τις εξισώσεις που έχουν μορφή $ax+b=0$.

♦ **Εξισώσεις με απόλυτες τιμές**

Μορφές Εξισώσεων:

❖ $|f(x)|=0$

• Αν $\theta < 0$ τότε είναι αδύνατη

• Αν $\theta \geq 0$ τότε

$|f(x)|=\theta \Leftrightarrow f(x)=\theta$ ή $f(x)=-\theta$

❖ $|f(x)|=|g(x)|$

• $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ ή $f(x)=-g(x)$

❖ $|f(x)|=g(x)$

• Πρέπει $g(x) \geq 0$ (1)

Κάνουμε δεκτές τις ρίζες των εξισώσεων $f(x)=g(x)$ και $f(x)=-g(x)$

που ικανοποιούν τον περιορισμό (1)

♦ **Η εξίσωση $x^n=a$**

a	n	Λύσεις της $x^n=a$
$a=0$	Άρτιος ή Περιττός	Μία: $x=0$
$a>0$	Άρτιος	Δυο: $x=\sqrt[n]{a}$ και $x=-\sqrt[n]{a}$
	Περιττός	Μία: $x=\sqrt[n]{a}$
$a<0$	Άρτιος	Καμμία (Αδύνατη)
	Περιττός	Μία: $x=-\sqrt[n]{-a}$

Για τις λύσεις της εξίσωσης $x^n=a^n$ έχουμε:

• Αν n περιττός, τότε $x^n=a^n \Leftrightarrow x=a$

• Αν n άρτιος, τότε $x^n=a^n \Leftrightarrow x=\pm a$

♦ **Η εξίσωση $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$**

Ορισμός: Εξίσωση δεύτερου βαθμού λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$

$\Delta=b^2-4ac$	$ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δυο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα $x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο IR

Σχόλιο: Αν $\Delta \geq 0$ τότε έχει ρίζες πραγματικές

♦ **Άθροισμα και γινόμενο ριζών της εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$**

Αν x_1 και x_2 , είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$ τότε: $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ και

$P=x_1x_2=\frac{c}{a}$ (Τύποι Vieta)

♦ Η εξίσωση $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$ με τη βοήθεια των τύπων του Vieta παίρνει τη μορφή $x^2-Sx+P=0$ που δίνει την δυνατότητα να την κατασκευάσουμε αν γνωρίζουμε το S και P

♦ **Διτετράγωνη:** Μια εξίσωση ονομάζεται διτετράγωνη, όταν είναι της μορφής $ax^4+bx^2+c=0$, $a \neq 0$

❖ **Πλήθος ριζών της εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$**

1. Έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες $\Leftrightarrow \Delta > 0, a \neq 0$

2. Έχει δυο ρίζες ίσες $\Leftrightarrow \Delta = 0, a \neq 0$

3. Δεν έχει ρίζες πραγματικές $\Leftrightarrow \Delta < 0$

4. Έχει ρίζες πραγματικές $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

5. Έχει δυο ρίζες ετερόσημες $\Leftrightarrow P < 0$

6. Έχει δυο ρίζες θετικές $\Leftrightarrow \Delta \geq 0, P > 0, S > 0$

7. Έχει δυο ρίζες αρνητικές $\Leftrightarrow \Delta \geq 0, P > 0, S < 0$

8. Έχει δυο ρίζες αντίθετες $\Leftrightarrow \Delta > 0, S = 0$

9. Έχει δυο ρίζες αντίστροφες $\Leftrightarrow \Delta > 0, P = 1$

♦ **Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού**

Μορφή $a(f(x))^2+bf(x)+c=0$, $a \neq 0$ Θέτουμε $f(x)=\omega$

Μορφή $a(f(x))^2+b|f(x)|+c=0$, $a \neq 0$ » $|f(x)|=\omega$

Μορφή $ax^4+bx^2+c=0$, $a \neq 0$ » $x^2=\omega$

Ανισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} Βαθμού

♦ Η ανίσωση $ax + \beta > 0 \Leftrightarrow ax > -\beta$ (1)

❖ Αν $a > 0$ τότε $x > -\frac{\beta}{a}$ Αν $a < 0$ τότε $x < -\frac{\beta}{a}$

❖ Αν $a = 0$ η (1) γίνεται $0x > -\beta$ (2)

♦ Αν $\beta \leq 0$ η (2) άρα και η (1) είναι αδύνατη

♦ Αν $\beta > 0$ τότε η (2) άρα και η (1) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

❖ Η ανίσωση $ax < -\beta$ λύνεται ανάλογα, καθώς και οι $ax \geq -\beta$, $ax \leq -\beta$

♦ Τριώνυμο

Η παράσταση $ax^2 + \beta x + \gamma$ λέγεται **τριώνυμο 2^{ου} βαθμού**

Η διακρίνουσα Δ της αντίστοιχης εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ λέγεται και διακρίνουσα του τριωνύμου

Ρίζες του τριωνύμου ονομάζονται οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

♦ **Πρόσημο τιμών τριωνύμου** Το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ γίνεται:

❖ Ετερόσημο του a μόνο όταν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

❖ Μηδέν όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου

❖ Ομόσημο του a σε κάθε άλλη περίπτωση. Δηλαδή

$\Delta > 0$	x	$-\infty$ ρ_1 ρ_2 $+\infty$	
	Πρόσημο	Ομόσημο των α	Ετερόσημο των α Ομόσημο των α
$\Delta = 0$	x	$-\infty$ ρ $+\infty$	
	Πρόσημο	Ομόσημο των α	Ομόσημο των α
$\Delta < 0$	x	$-\infty$ $+\infty$	
	Πρόσημο	Ομόσημο των α	

♦ **Ανισώσεις της μορφής** $ax^2 + \beta x + \gamma > 0$ ή $ax^2 + \beta x + \gamma < 0$

Τα προηγούμενα συμπεράσματα χρησιμοποιούνται στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma > 0$ (< 0), $a \neq 0$ που ονομάζονται **ανισώσεις δευτέρου βαθμού**

♦ Πρόσημο γινομένου

Για να μελετήσουμε το πρόσημο του γινομένου $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \Gamma(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$ όπου

$A(x), B(x), \Gamma(x), \dots, \Phi(x)$ είναι της μορφής $ax + \beta$ ή $ax^2 + \beta x + \gamma$ ή $(ax + \beta)^n$, $a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$

βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά.

♦ Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Μορφές Ανισώσεων:

❖ $|f(x)| < a$ (1)

• Αν $a \leq 0$ τότε η (1) είναι αδύνατη

• Αν $a > 0$ τότε $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$

❖ $|f(x)| > a$ (2)

• Αν $a < 0$ τότε η (2) είναι ταυτότητα

• Αν $a > 0$ τότε $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) > a$ ή $f(x) < -a$

• Αν $a = 0$ τότε από την (1) έχουμε $f(x) \neq 0$

❖ $|f(x)| < |g(x)|$

$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow |f(x)|^2 < |g(x)|^2 \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow \dots$

Σημείωση: Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις μπορούν να λυθούν με διάκριση περιπτώσεων.

♦ Μορφές Τριωνύμου

Το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ γράφεται ως εξής: $f(x) = a \left[\left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

• Αν $\Delta > 0$ έχει δυο ρίζες άνισες x_1, x_2 και μετασχηματίζεται σε γινόμενο του a επί δυο πρωτοβάθμιους παράγοντες δηλαδή $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

• Αν $\Delta = 0$ τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του a

επί ένα τέλειο τετράγωνο δηλαδή $f(x) = a \left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2$

• Αν $\Delta < 0$ το τριώνυμο γράφεται $f(x) = a \left[\left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2} \right]$

♦ **Ανισώσεις της μορφής** $A(x) \cdot B(x) \cdot \Gamma(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ (< 0)

Όπως το πρόσημο γινομένου.

♦ **Ανισώσεις της μορφής** $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ (< 0) Είναι $\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0$