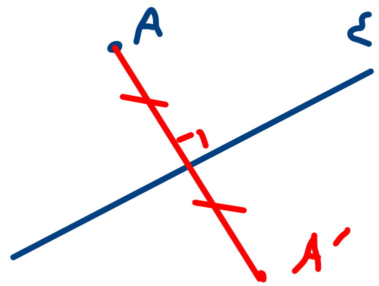
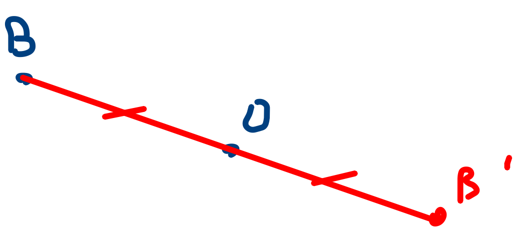
- Συμμετρία

• Συμμετρικό σημείου με ευθεία



το A΄ συμμετρικό του A ως προς την ε

• Συμμετρικό σημείου ως προς σημείο



το B΄ συμμετρικό του B ως προς O.

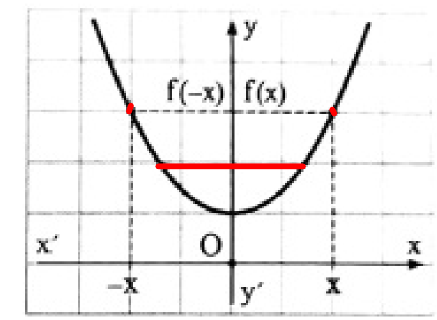
4.1 Συμμετρίες συνάρτησης

Άρτια συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A είναι **άρτια** όταν ισχύουν οι συνθήκες:

- για κάθε $x \in A$ το $-x \in A$ και
- $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y**.

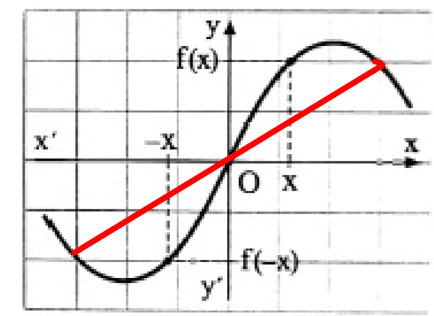


Περιττή συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A είναι **περιττή** όταν ισχύουν οι συνθήκες:

- για κάθε $x \in A$ το $-x \in A$ και
- $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων**.



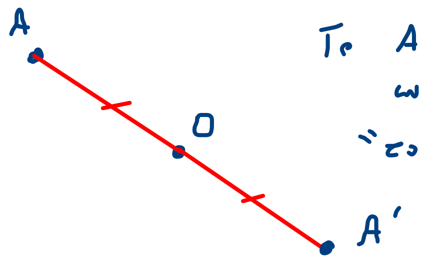
> Όταν εξετάζουμε αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή, λέμε ότι εξετάζουμε τη συνάρτηση **ως προς τις συμμετρίες**.

Σύνολα συμμετρικά ως προς το μηδέν

Για να ικανοποιείται η συνθήκη «για κάθε $x \in A$ το $-x \in A$», πρέπει το πεδίο ορισμού A να είναι, όπως λέμε, **συμμετρικό ως προς το μηδέν**. Τέτοια σύνολα είναι, για παράδειγμα, τα επόμενα:

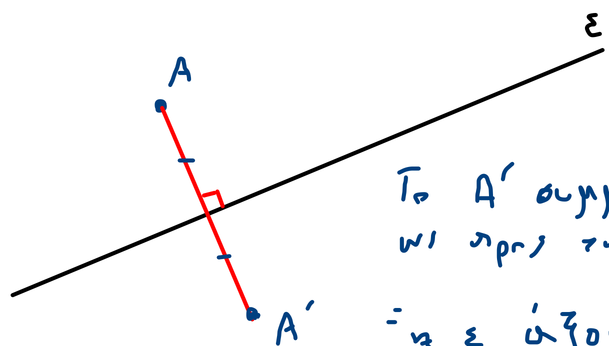
- $(-\alpha, \alpha)$
- $(-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty)$
- $\mathbb{R} - \{\alpha, -\alpha\}$
- $[-\alpha, \alpha]$
- $(-\beta, -\alpha) \cup (\alpha, \beta)$
- $(-\alpha, \alpha) - \{\beta, -\beta\}$
- $(-\infty, -\alpha) \cup (\alpha, +\infty)$
- $[-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$
- $\mathbb{R}^*$ κ.λπ.

Συμμετρία σημείου ως προς σημείο



Το A' συμμετρικό του A
ως προς το O
("το O κέντρο συμμετρίας")

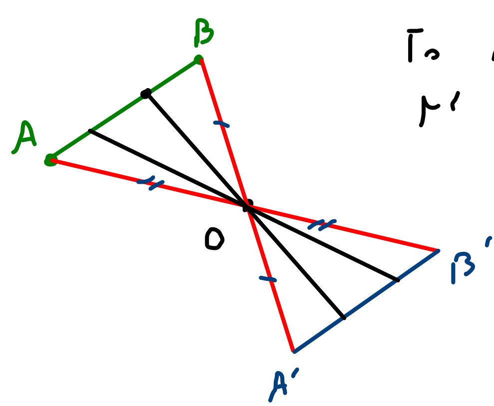
σημείου προς ευθεία



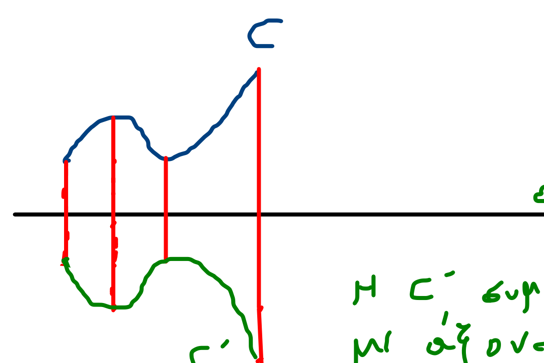
Το A' συμμετρικό του A
ως προς την ευθεία ε

"η ε άξονα συμμετρίας"

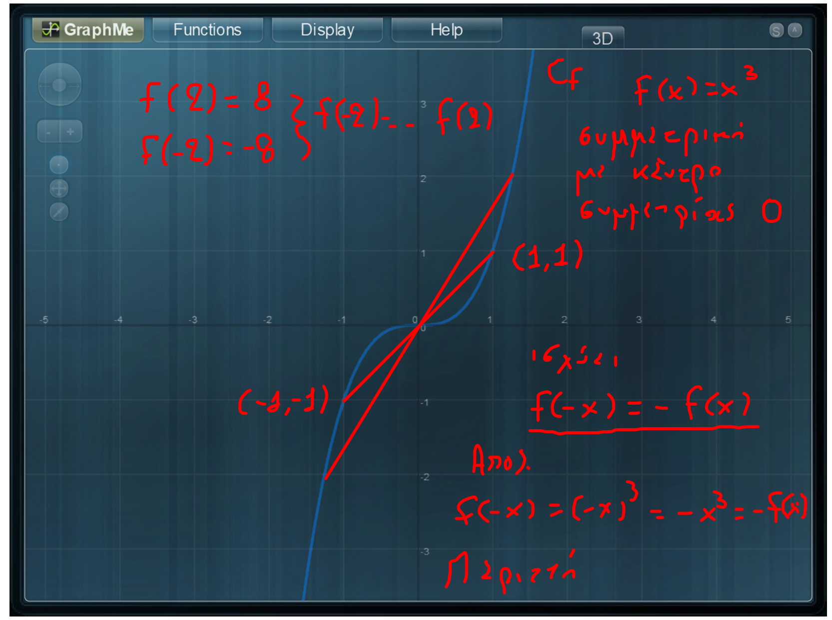
Συμμετρία τμήματος

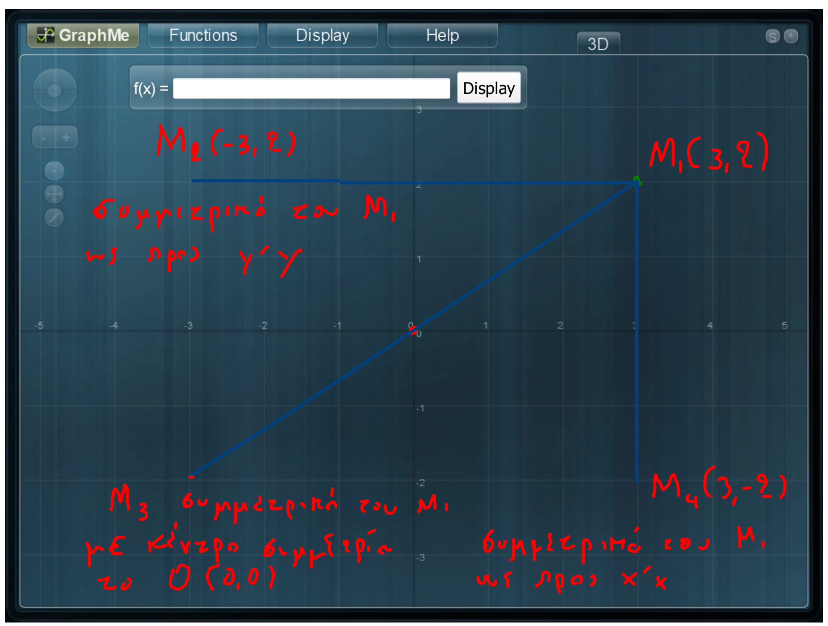


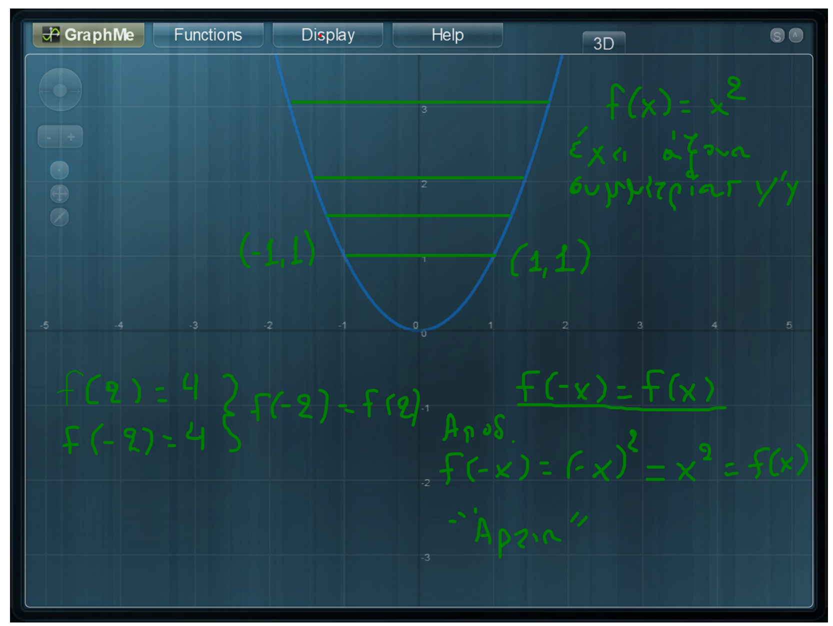
Το A'B' συμμετρικό του AB
με κέντρο συμμετρίας το O



Η C' συμμετρική της C
με άξονα συμμετρίας
την ευθεία ε







Γενικά $M(x,y)$ έχει συμμετρικό με:

- άξονα συμμετρίας τον x'x το $(x,-y)$
- άξονα συμμετρίας τον y'y το $(-x,y)$
- κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$ το $(-x,-y)$

Βασική προϋπόθεση για να είναι μία συνάρτηση "συμμετρική" δηλ. άρτια ή περιττή, είναι το π.ο της να είναι ένα σύνολο συμμετρικό ως προς το μηδέν δηλ. για κάθε $x \in D_f$ και το $-x \in D_f$

π.χ. $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

$\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$(-a,a)$

$[-a,a]$

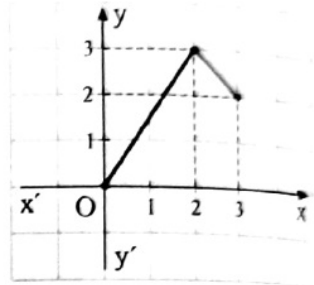
$(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$

Εφαρμογή

Δίνεται συνάρτηση:

π.ο συμμετρικό ως προς το 0

$$f:\ [-3,\ 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

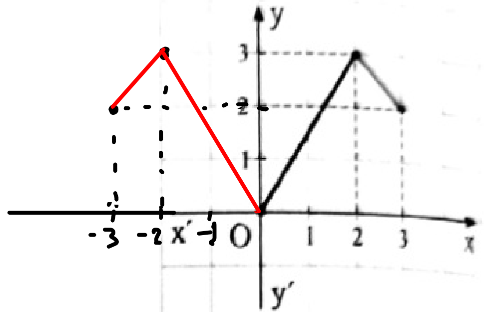


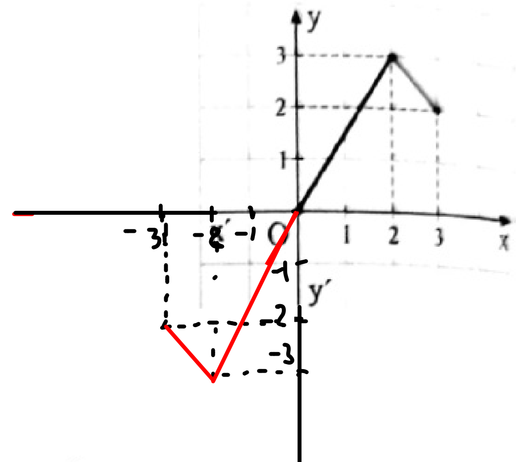
Ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f, αν γνωρίζετε ότι η f είναι:

α) άρτια, για $x \in D_f$ και $-x \in D_f$ **β) περιττή.**

για να είναι άρτια ισχύει $f(-x)=f(x)$

- για να είναι περιττή $f(-x)=-f(x)$





4.2 Μελέτη συνάρτησης ως προς τις συμμετρίες

Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή, εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.
- Εξετάζουμε αν το A είναι **συμμετρικό ως προς το 0**, δηλαδή αν για κάθε $x \in A$ το $-x \in A$.
- Βρίσκουμε το $f(-x)$, θέτοντας στον τύπο της f όπου x το $-x$ και έχουμε:
  - ▶ αν $f(-x) = f(x)$, τότε η f είναι **άρτια**,
  - ▶ αν $f(-x) = -f(x)$, τότε η f είναι **περιττή**.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=2x^4-x^2+1$

η f έχει π.ο $D_f=\mathbb{R}$.

για $x \in \mathbb{R}$ και το $-x \in \mathbb{R}$

$f(-x)=2(-x)^4-(-x)^2+1=2x^4-x^2+1=f(x)$

δηλ. $f(-x)=f(x)$

$(-x)^{2\nu}=x^{2\nu}$

άρα η f άρτια

η συνάρτηση $f(x)=2x^3-x$

η f έχει π.ο $D_f=\mathbb{R}$

για $x \in \mathbb{R}$ και το $-x \in \mathbb{R}$

$f(-x)=2(-x)^3-(-x)=-2x^3+x=-(2x^3-x)=-f(x)$

$(-x)^{2\nu+1}=-x^{2\nu+1}$

άρα $f(-x)=-f(x)$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας <u>άρτιας</u> συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-6,6]$. Να χαραχθούν και τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής:

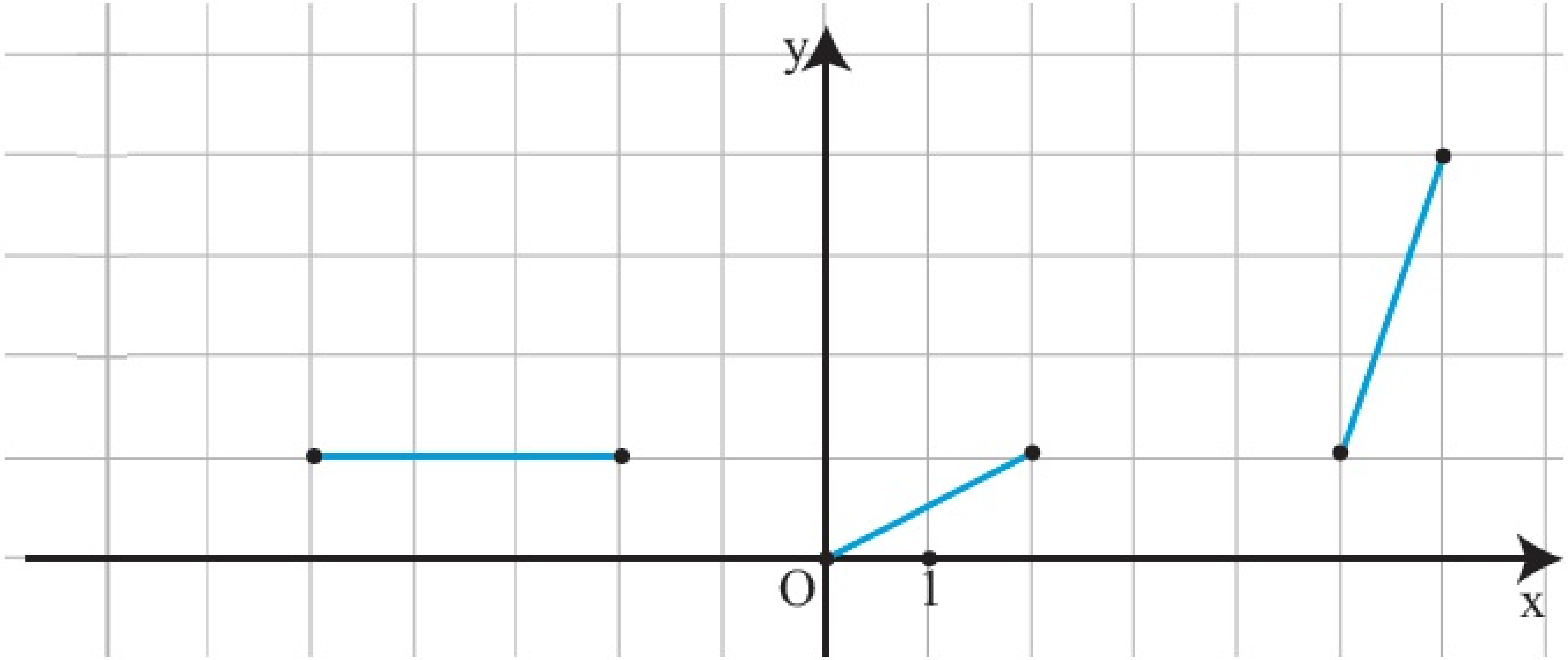
α) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f :

i) είναι γνησίως αύξουσα,

ii) είναι γνησίως φθίνουσα,

iii) είναι σταθερή.

β) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f, καθώς επίσης οι θέσεις των ακροτάτων αυτών.



H/W διάβασμα όλο το 2.1 (οι ορισμοί απ' έξω)
σελ. 30-38
ασκήσεις: σελ. 38-39 4 i), ii), iv), v)
6
7
8
(μελετήστε την εφαρμ. σελ. 36-37)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων.