Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2ο τεταρτ.

1. Αν $ημx = \frac{3}{5}$ και $\frac{π}{2} < x < π$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Σύμφωνα με την τριγ. ταυτότητα

$ημ^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow συν^2x = 1 - ημ^2x \Leftrightarrow συν^2x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\Leftrightarrow συν^2x = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow συν^2x = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} \Leftrightarrow συν^2x = \frac{16}{25}$

$\Leftrightarrow συνx = \begin{cases} \sqrt{\frac{16}{25}} = \cancel{\frac{4}{5}} \\ -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} \end{cases}$ Απορ. γιατί για $\frac{π}{2} < x < π$ (αμβλεία) Δεκτή το $συνx < 0$

Άρα $\boxed{συνx = -\frac{4}{5}}$

Ακόμα $εφx = \frac{ημx}{συνx} \Leftrightarrow εφx = \frac{\frac{3}{\cancel{5}}}{-\frac{4}{\cancel{5}}} \Leftrightarrow \boxed{εφx = -\frac{3}{4}}$

και $σφx = \frac{συνx}{ημx} \Leftrightarrow σφx = \frac{-\frac{4}{\cancel{5}}}{\frac{3}{\cancel{5}}} \Leftrightarrow \boxed{σφx = -\frac{4}{3}}$

3ο τεταρτ.

2. Αν $συνx = -\frac{2}{3}$ και $π < x < \frac{3π}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Σύμφωνα με τριγων. ταυτότητα

$$ημ^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow ημ^2x = 1 - συν^2x \Leftrightarrow ημ^2x = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow ημ^2x = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow ημ^2x = \frac{9}{9} - \frac{4}{9} \Leftrightarrow ημ^2x = \frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow ημx = \begin{cases} \sqrt{\frac{5}{9}} = \cancel{\frac{\sqrt{5}}{3}} & \text{Απορ.} \\ -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3} & \text{Δεκτή} \end{cases}$$

γιατί για $π < x < \frac{3π}{2}$ το $ημx < 0$

Άρα $\boxed{ημx = -\frac{\sqrt{5}}{3}}$

Ακόμα $εφx = \frac{ημx}{συνx} \Leftrightarrow εφx = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}}}{-\frac{2}{\cancel{3}}} \Leftrightarrow \boxed{εφx = \frac{\sqrt{5}}{2}}$

και $εφx \cdot σφx = 1 \Leftrightarrow σφx = \frac{1}{εφx} \Leftrightarrow σφx = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

$$\Leftrightarrow σφx = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \boxed{σφx = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

Ρητοποίηση

$$\frac{1}{\sqrt{α}} = \frac{1 \cdot \sqrt{α}}{\sqrt{α} \cdot \sqrt{α}} = \frac{\sqrt{α}}{(\sqrt{α})^2} = \frac{\sqrt{α}}{α}$$

3. Αν $εφx = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και $\dfrac{3π}{2} < x < 2π$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

4ο τεταρτ.

Σύμφωνα με τη τριγων. ταυτότητα $εφx \cdot σφx = 1$

$$\Leftrightarrow σφx = \frac{1}{εφx} \Leftrightarrow σφx = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow σφx = -\frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow σφx = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow σφx = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} \Leftrightarrow σφx = -\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} \Leftrightarrow \boxed{σφx = -\sqrt{3}}$$

Ακόμα

$$συν^2x = \frac{1}{1+εφ^2x} = \frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{3}{9}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow συνx = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{Δεκτή} \\ \text{ή} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} = \cancel{-\frac{\sqrt{3}}{2}} & \text{Απορ.} \end{cases}$$

γιατί για $\frac{3π}{2} < x < 2π$ το $συνx > 0$

άρα $\boxed{συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Τέλος σύμφωνα

$$ημ^2x = \frac{εφ^2x}{1+εφ^2x} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\frac{3}{9}}{1+\frac{3}{9}} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{4}{\cancel{3}}} = \frac{1}{4}$$

$$ημx = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{4}} = \cancel{\frac{1}{2}} & \text{Απορ.} \\ \text{ή} \\ -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} & \text{Δεκτή} \end{cases}$$

γιατί για $\frac{3π}{2} < x < 2π$ το $ημx < 0$

άρα $\boxed{ημx = -\frac{1}{2}}$

Β' τρόπος

Πως βρίσκω ημx (ή συνx) αν μου δίνει εφx (ή σφx)

λύση $εφx = \dfrac{ημx}{συνx}$ $\quad -\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{ημx}{συνx} \Leftrightarrow ημx = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}συνx$ (1)

Από τριγων. ταυτότητα $ημ^2x + συν^2x = 1$ (2)

$$(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}συνx\right)^2 + συν^2x = 1 \Leftrightarrow \frac{συν^2x}{3} + συν^2x = 1$$

$= \ldots\ldots$

↓ 1ο τεταρτ. όξεία

4. Αν $\sigma\varphi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Από τριγων. ταυτότητα

$\varepsilon\varphi x\, \sigma\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sigma\varphi x} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{5}{2\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{5\sqrt{5}}{2\cdot\cancel{5}} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{5}}{2}}$

Ακόμα $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{5}{4}} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$

άρα $\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} & \text{Δεκτή} \\ \text{ή} \\ -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\cancel{\frac{2}{3}} & \text{Απορ.} \end{cases}$

επειδή για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (οξεία) το $\sigma\upsilon\nu x > 0$

άρα $\boxed{\sigma\upsilon\nu x = \frac{2}{3}}$

Ακόμα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{9}{9} - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{5}{9}$

$\Leftrightarrow \eta\mu x = \begin{cases} \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} & \text{Δεκτή} \\ \text{ή} \\ -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\cancel{\frac{\sqrt{5}}{3}} & \text{Απορ.} \end{cases}$

επειδή για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (οξεία) $\eta\mu x > 0$

Άρα $\boxed{\eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{3}}$

5. Αν $\sigma\varphi x = -2$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$.

√ 4ο τεταρτ.

Ισχύει

$$\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sigma\varphi x} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{1}{-2} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} & \text{Δεκτή} \\ \text{ή} & \\ -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = \cancel{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} & \text{Απορ.} \end{cases}$$

γιατί! για $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ $\Leftrightarrow$ $\sigma\upsilon\nu x > 0$

Ακόμη

$$\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow -2 = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\eta\mu x} \Leftrightarrow -2\eta\mu x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Άρα

$$\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}}{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-\frac{4\sqrt{5}^2}{25}}{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-\frac{4}{\cancel{5}}}{\frac{5+2\sqrt{5}}{\cancel{5}}} = -\frac{4}{5+2\sqrt{5}}$$

$$= -\frac{4(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})\cdot(5-2\sqrt{5})} = -\frac{4(5-2\sqrt{5})}{5^2-(2\sqrt{5})^2} = -\frac{4(5-2\sqrt{5})}{25-4\sqrt{5}^2}$$

$$= \frac{-4(5-2\sqrt{5})}{5}$$

6. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες:

i) Να ισχύει συγχρόνως ημx = 0 και συνx = 0.

ii) Να ισχύει συγχρόνως ημx = 1 και συνx = 1.

iii) Να ισχύει συγχρόνως $ημx = \frac{3}{5}$ και $συνx = \frac{4}{5}$.

Ισχύει $ημ^2x + συν^2x = 1$

i) για $ημx = 0$ και $συνx = 0$: $0^2 + 0^2 = 1 \Leftrightarrow 0 \neq 1$ Δεν ισχύει

ii) για $ημx = 1$ και $συνx = 1$: $1^2 + 1^2 = 1 \Leftrightarrow 2 \neq 1$ Δεν ισχύει

iii) για $ημx = \frac{3}{5}$ και $συνx = \frac{4}{5}$: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{25}{25} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$

Που ισχύει

10. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$ ii) $\sigma\upsilon\nu^4\alpha-\eta\mu^4\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$.

Έχω ότι ισχύει

i) $\dfrac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \Leftrightarrow \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\alpha=(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1$ που ισχύει

ii) $\sigma\upsilon\nu^4\alpha-\eta\mu^4\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$

Έχουμε $\sigma\upsilon\nu^4\alpha-\eta\mu^4\alpha=(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2-(\eta\mu^2\alpha)^2=\underbrace{(\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha)}_{1}(\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha)$

$=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-(\underline{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha})$

$=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$

* $\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha=1-\eta\mu^2\alpha\end{cases}$

11. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}=\frac{2}{\eta\mu\theta}$ ii) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$.

i) $\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}=\frac{2}{\eta\mu\theta}$

έχουμε

$$\frac{\overset{\eta\mu\theta}{}\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{\overset{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{}1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu^2\theta}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}+\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}$$

$$=\frac{\eta\mu^2\theta+1^2+2\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}=\frac{1+1+2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}=\frac{2+2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}$$

$$=\frac{2\cancel{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}}{\eta\mu\theta\cancel{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}}=\frac{2}{\eta\mu\theta}$$

ii) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$

Το

$$\frac{\overset{1+\eta\mu x}{}\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}+\frac{\overset{1-\eta\mu x}{}\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x(1+\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}+\frac{\sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x+\cancel{\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu x}+\sigma\upsilon\nu x-\cancel{\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu x}}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}=\frac{2\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}=\frac{2\cancel{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu^{\cancel{2}}x}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2x=1-\eta\mu^2x$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν ημx + συνx = α , να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α τις παραστάσεις:

i) $ημx \cdot συνx$ **ii)** $\frac{1}{ημx}+\frac{1}{συνx}$

iii) $εφx+σφx$ **iv)** $ημ^3x+συν^3x$.

1. $ημx + συνx = α$

i) $(ημx+συνx)^2 = α^2 \Leftrightarrow ημ^2x + 2ημxσυνx + συν^2x = α^2$

$1 + 2ημxσυνx = α^2 \Leftrightarrow ημxσυνx = \frac{α^2-1}{2}$

ii) $\overset{συνx}{\frac{1}{ημx}} + \overset{ημx}{\frac{1}{συνx}} = \frac{συνx}{ημxσυνx} + \frac{ημx}{ημxσυνx} = \frac{συνx+ημx}{ημxσυνx}$

$= \frac{α}{\frac{α^2-1}{2}} = \frac{2α}{α^2-1}$

iii) $εφx + σφx = \overset{ημx}{\frac{ημx}{συνx}} + \overset{συνx}{\frac{συνx}{ημx}} = \frac{ημ^2x}{ημxσυνx} + \frac{συν^2x}{ημxσυνx}$

$= \frac{ημ^2x+συν^2x}{ημxσυνx} = \frac{1}{\frac{α^2-1}{2}} = \frac{2}{α^2-1}$