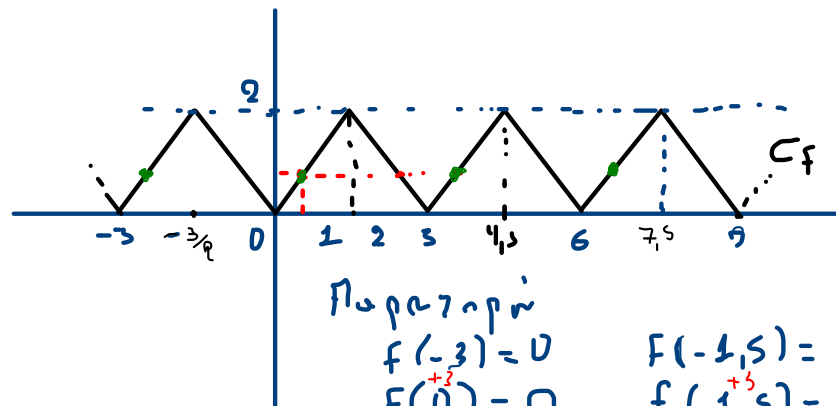


3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Περιοδικές συναρτήσεις



Παρατηρών

$$f(-3) = 0 \quad f(-1,5) = 2$$

$$f(0) = 0 \quad f(1,5) = 2$$

$$f(3) = 0 \quad f(4,5) = 2$$

$$f(6) = 0 \quad f(7,5) = 2$$

$$f(9) = 0$$

δ.λ. ισχύει $f(x) = f(x+3) = f(x-3)$

Ουσιαστικά η f έχει περίοδο $T = 3$

Γενικότερα:

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

i) $x + T \in A, x - T \in A$

και

ii) $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

Παρατηρήσεις:

- Αν μία συνάρτηση f περιοδική με περίοδο T , τότε και καθένας από τους αριθμούς $2T, 3T, 4T, \dots, nT$ με $n \in \mathbb{N}^*$ αποτελούν περίοδο της f

- Αν το πεδίο ορισμού της f είναι διάστημα (ανοικτό ή κλειστό) με πραγματικά άκρα τότε η συνάρτηση δεν είναι περιοδική.

Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$
($\eta\mu x = \eta\mu(x \text{ rad})$)

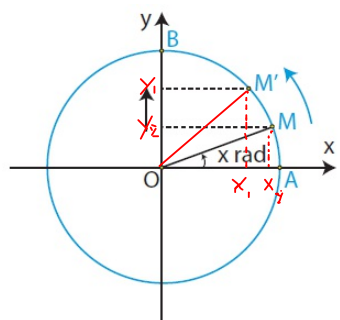
1. έχει πεδίο ορισμού: είναι $A = \mathbb{R}$

2. Σύνολο Τιμών: είναι $f(A) = [-1, 1]$
γιατί για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$

3. Περιοδικότητα: η $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με $T = 2\pi$
γιατί ισχύει
• $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ και $x - 2\pi \in \mathbb{R}$
• $f(x + 2\pi) = \eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu x = f(x)$
 $f(x - 2\pi) = \eta\mu(x - 2\pi) = \eta\mu x = f(x)$

4. Συμμετρία: είναι περιττή με κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$
γιατί
• για $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$
• $f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x)$

5. Μονοτονία: η $f(x)$ είναι



- γνησίως αυξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$
- γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$
- γνησίως φθίνουσα στο $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$
- γνησίως αυξουσα στο $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

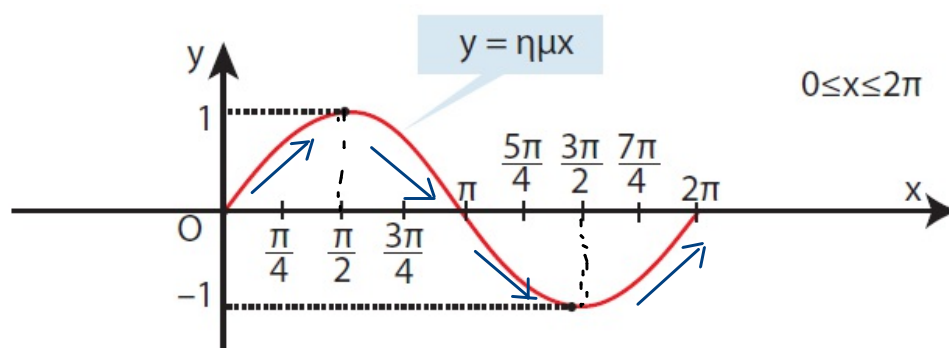
6. Ακρότατα: η $f(x) = \eta\mu x$ παρουσιάζει
• Μέγιστο το 1 στο θίβη $x = \frac{\pi}{2}$ (και $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$)
• ελάχιστο το -1 στο θίβη $x = \frac{3\pi}{2}$ (και $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$)
όπου $k \in \mathbb{Z}$

7. Σημεία Τερής με τους άξονες: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$
έρχεται
• τον άξονα $y'y$ στο σημείο $O(0,0)$
• τον άξονα $x'x$ στα σημεία με $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$
δηλ. στα $x = k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$

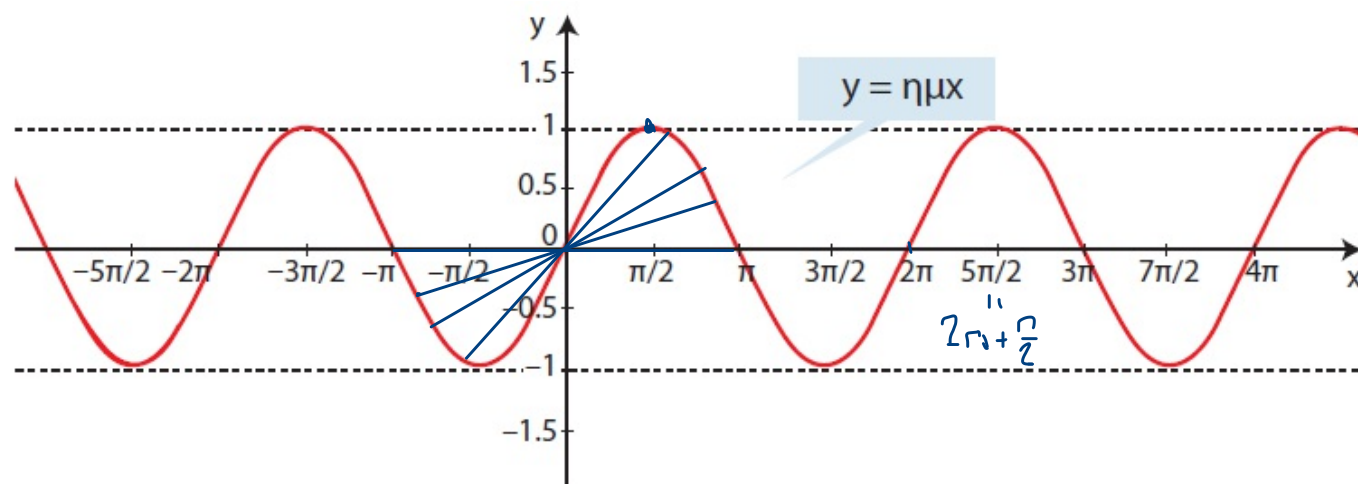
8. Πίνakas Περιοδικότητας

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1 μέγ.	0	-1 ελάχ.	0

δίνεται: $x \in [0, 2\pi]$



9. Γραφική Παράσταση του $f(x) = \eta\mu x$



Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \sin x$

Η $f(x) = \sin x$ ($\sin x = \sin(x \text{ rad})$)

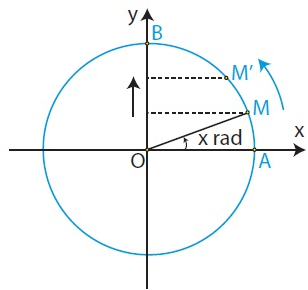
1. Πεδίο Ορισμού : το $A = \mathbb{R}$

2. Σύνολο Τιμών : το $f(A) = [-1, 1]$
γιατί: για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq \sin x \leq 1$

3. Περιοδικότητα : η $f(x) = \sin x$ είναι περιοδική με $T = 2\pi$
γιατί: ισχύει
• $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ και $x - 2\pi \in \mathbb{R}$
• $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$
 $f(x - 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \sin x = f(x)$

4. Συγγλυμότητα : η $f(x) = \sin x$ είναι άρτια με άξονα συμμετρίας γ'γ
γιατί : $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$
• $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

5. Μονοτονία : η $f(x) = \sin x$ είναι :



- γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$
- γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$
- γνησίως αύξουσα στο $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$
- γνησίως αύξουσα στο $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

6. Ακρότατα : η $f(x) = \sin x$ παρουσιάζει :

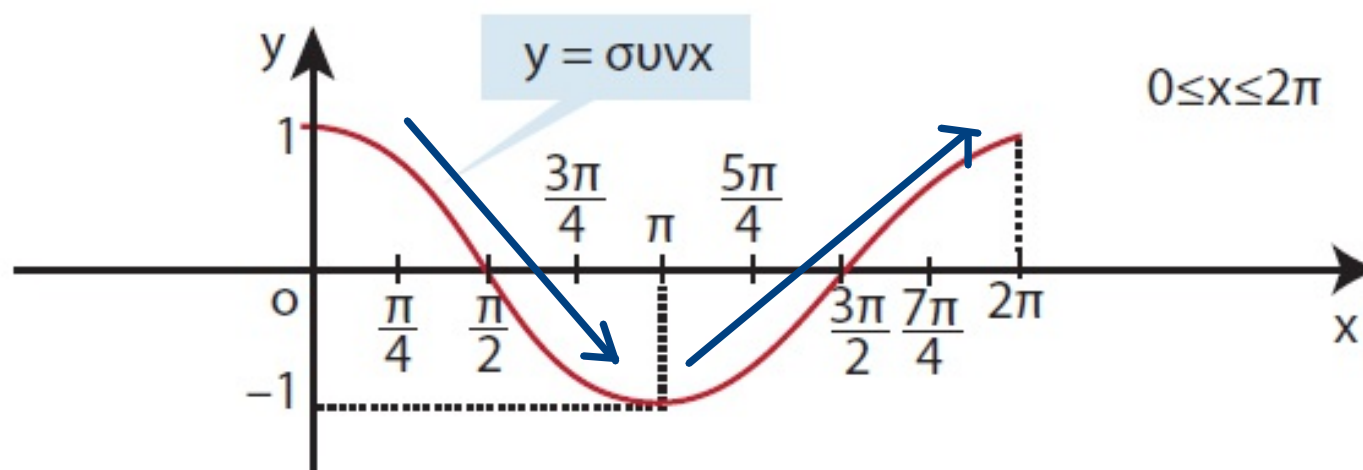
- μέγιστο το 1 στο 0 ή $x = 2k\pi$ (και για $x = 2k\pi + \pi$)
 $k \in \mathbb{Z}$
- ελάχιστο το -1 στο π ή $x = 2k\pi + \pi$ (και για $x = 2k\pi$)
 $k \in \mathbb{Z}$

7. Σημεία τομής με τους άξονες : Η γραφ. παράσταση της $f(x) = \sin x$ τέμνει :

- τον άξονα γ'γ στο σημείο $(0, 1)$
- τον άξονα x'x στα σημεία με $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$
δ.λ. με $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ με $k \in \mathbb{Z}$

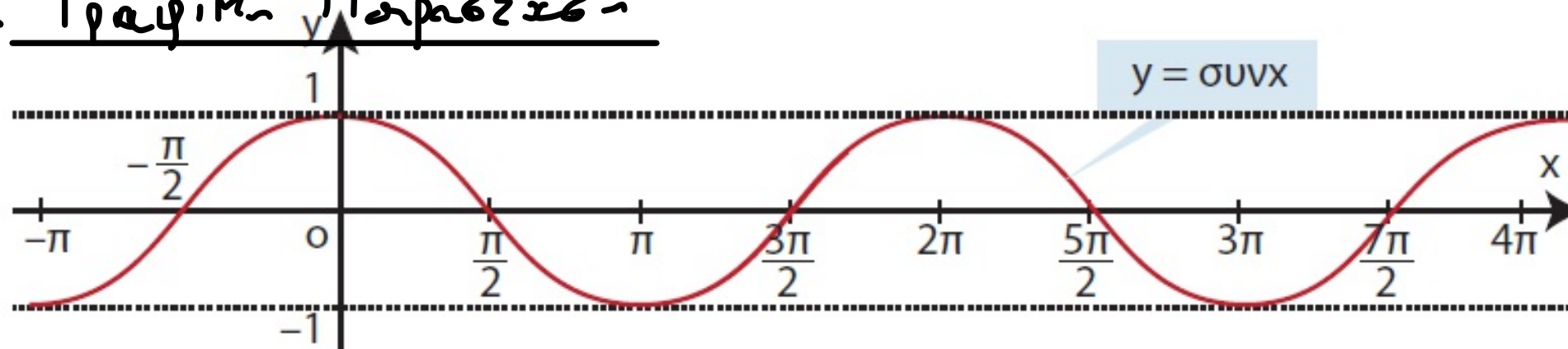
8. Πίνακας Μικροβολών

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνx	1 μέγ.	0	-1 ελάχ.	0	1 μέγ.



Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , η γραφική της παράσταση στο $\mathbb{R}$ είναι η ακόλουθη:

9. Γραφική Παράσταση



Μελέτη των συναρτήσεων

$$f(x) = \varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \text{ και}$$

1. Πεδίο Ορισμού: $A = \{x \in \mathbb{R} / \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

2. Συνολο Τιμών: $f(A) = \mathbb{R}$

3. Περιοδικότητα: Είναι περιοδική με $T = \pi$
 γιατί: $\bullet x + \pi \in A$ και $x - \pi \in A$
 $\bullet f(x + \pi) = \varepsilon\varphi(x + \pi) = \varepsilon\varphi x = f(x)$
 $f(x - \pi) = \varepsilon\varphi(x - \pi) = \varepsilon\varphi x = f(x)$

4. Συμμετρία: Είναι περιττή
 γιατί: $\bullet x \in A$ και $-x \in A$
 $\bullet f(-x) = \varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x = -f(x)$

5. Μονοτονία: Είναι γνησίως αύξουσα
 στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

6. Ακρότατα: Δεν έχει ακρότατα

7. Σημεία εφ' ου: Η γραφική παράσταση είναι
 με τους άξονες
 $\bullet$ του γ'γ στο $(0, 0)$
 $\bullet$ του χ'χ στα σημεία με
 $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$
 δηλ και που μηδενίζονται
 το ημ ὡς στο $(k\pi, 0)$
 με $k \in \mathbb{Z}$

$$F(x) = \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

$A = \{x \in \mathbb{R} / \eta\mu x \neq 0\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$f(A) = \mathbb{R}$

Είναι περιοδική με $T = \pi$
 γιατί: $\bullet x + \pi \in A$ και $x - \pi \in A$
 $\bullet f(x + \pi) = \sigma\varphi(x + \pi) = \sigma\varphi x = f(x)$
 $f(x - \pi) = \sigma\varphi(x - \pi) = \sigma\varphi x = f(x)$

Είναι περιττή
 γιατί: $\bullet x \in A$ και $-x \in A$
 $\bullet f(-x) = \sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x = -f(x)$

Είναι γνησίως φθίνουσα
 στο $(0, \pi)$

Δεν έχει ακρότατα

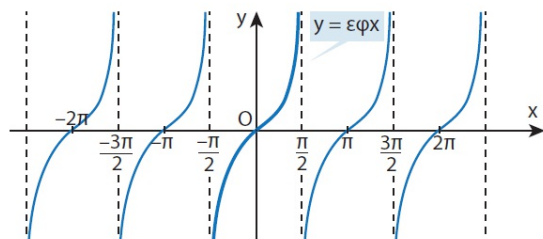
Η γραφική παράσταση είναι
 $\bullet$ του γ'γ στο $(0, 0)$
 $\bullet$ του χ'χ στα σημεία με
 $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$
 δηλ και που μηδενίζονται
 το σν ὡς στο $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$
 με $k \in \mathbb{Z}$

8. Γραφική Παράσταση

Για την γραφική παράσταση του $f(x) = \tan x$ έχουμε:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
εφx	Δεν ορίζεται	$-\sqrt{3} \approx -1,7$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,6$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,6$	1	$\sqrt{3} \approx 1,7$	Δεν ορίζεται

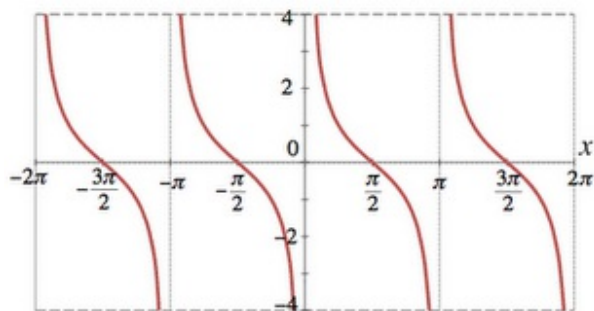
Στη συνέχεια παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \tan x$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εκεί που η $f(x) = \tan x$ δεν ορίζεται έχουμε ευθείες "ασύμπτωτες" που (δλ. η C_f δεν τις ακουμπά ποτέ) τις $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ κλ.

(δλ. τις $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ κλ ευθείες.)

Με Όμοιο τρόπο η γραφική Παράσταση του $f(x) = \cot x$



Εκεί που η $f(x) = \cot x$ δεν ορίζεται έχουμε ευθείες "ασύμπτωτες" που (δλ. η C_f δεν τις ακουμπά ποτέ) τις $x = \pi$, $x = -\pi$, $x = 2\pi$ κλ.

(δλ. τις $x = k\pi$ κλ ευθείες.)

Για γραφικὴ παραβόλῃ γιν $\sin x$, $\cos x$.

1) Μετασχηματισμοί: (2ο ίδιο, 1ο γιν $\cos x$)

- Αν $f(x) = \sin x \pm c$ κατακόρυφη επί $\sin x$
 - Περίοδος: 2π
 - Σύστημα τιμών: $[-1 \pm c, 1 \pm c]$
- Αν $f(x) = \sin(x \pm c)$ οριζ. όντια επί $\sin x$
 - Περίοδος: 2π
 - Σ.Τ: $[-1, 1]$



$$f(x) = \sin x + 2 \quad \begin{array}{l} \nearrow T = 2\pi \\ \rightarrow \text{σύστημα τιμών} \\ [1, 3] \end{array}$$

$$f(x) = \sin(x + 1) \quad \begin{array}{l} \nearrow T = 2\pi \\ \rightarrow \text{σύστημα τιμών} \\ [-1, 1] \end{array}$$

2) Αντίθετοι: Είναι συμμετρικοί ως προς $x'x$

$$f(x) = -\sin x$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$-\sin x$	0	-1	0	1

$$f(x) = -\cos x$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	0	-1	0
$-\cos x$	-1	0	1	-1



$p, \omega > 0$

3. $f(x) = p \sin \mu x$ ↗ Σύνολο τιμών $[-p, p]$
↘ Περίοδος $T = \frac{2\pi}{\mu}$
 δεν αλλάζει

π.χ. $f(x) = 3 \sin \mu x$
 σύνολο τιμών $[-3, 3]$

4. $f(x) = \sin(\omega x)$ ↗ Σύνολο τιμών $[-1, 1]$
 δεν αλλάζει
↘ Περίοδος $T = \frac{2\pi}{\omega}$

π.χ. $f(x) = \sin(2\omega)$
 περίοδος $\frac{2\pi}{\omega}$

5. Συνδυασμός 3 και 4

δηλ. $f(x) = p \sin(\omega x)$

Πίνακας τιμών

ωx	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{p}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$\sin(\omega x)$	0	1	0	-1	0
$p \sin(\omega x)$	0	p	0	-p	0

* Όμοια ισχύουν και για το $\cos x$

ΣΧΟΛΙΟ

Από τα προηγούμενα παραδείγματα γίνεται φανερό ότι σε μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = p \sin \omega x$, όπου $p, \omega > 0$:

(i) Το p καθορίζει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με p και την ελάχιστη τιμή της, που είναι ίση με $-p$.

(ii) Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης που είναι ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$.

Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για μια συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = p \cos \omega x, \text{ όπου } p, \omega > 0$$

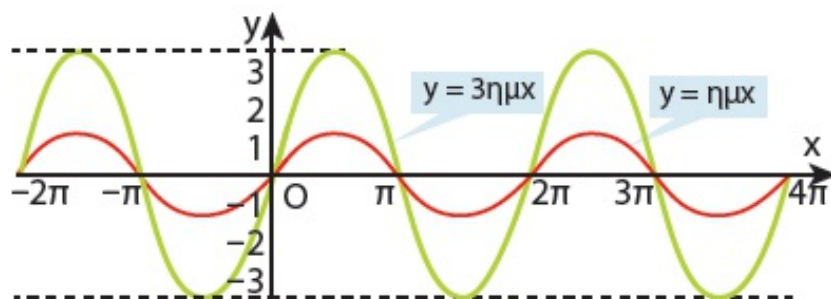
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1^ο Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu x$.

ΛΥΣΗ

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$3\eta\mu x$	0	3	0	-3	0

Η $f(x)=3\eta\mu x$ έχει περίοδο $T=2\pi$
και εύρος τιμών $[-3, 3]$



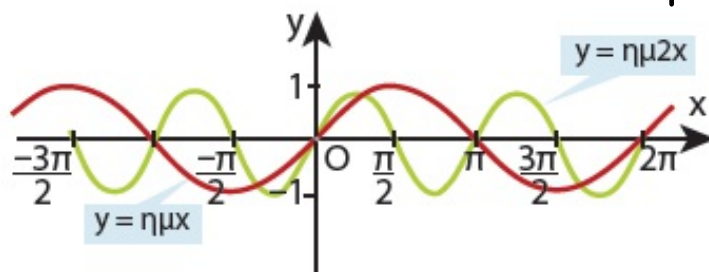
2^ο Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu 2x$.

ΛΥΣΗ

$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\eta\mu 2x$	0	1	0	-1	0

όλα δια
 $\omega=2$

η $f(x)=\eta\mu 2x$ έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$
και εύρος τιμών $[-1, 1]$



3^ο Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu 2x$.

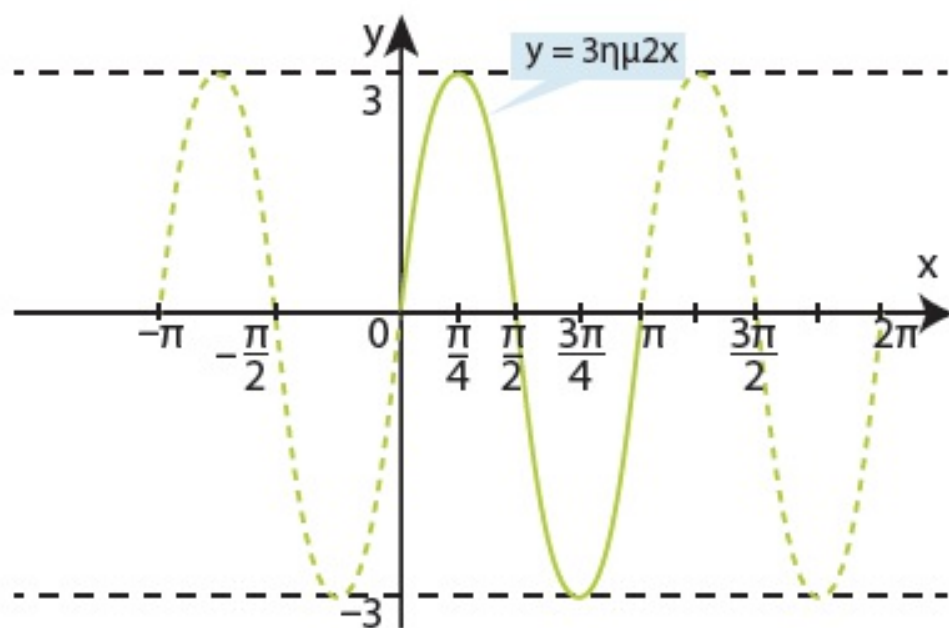
ΛΥΣΗ

$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\eta\mu 2x$	0	1	0	-1	0
$3\eta\mu 2x$	0	3	0	-3	0

$\delta \cdot \omega = 2$

$\rho = 3$

φτιάχνω
ενα f



Η $f(x)$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

και εύρος τιμών $[-3, 3]$

H/W: Μελέτη 3.4 βχολικό

Ασκήσεις: βελ. 81, 82

Μόνο τις f(x)
από i) και ii)

α. ομάδα: 1, 3, 4, 5, 6

β. ομάδα: 1