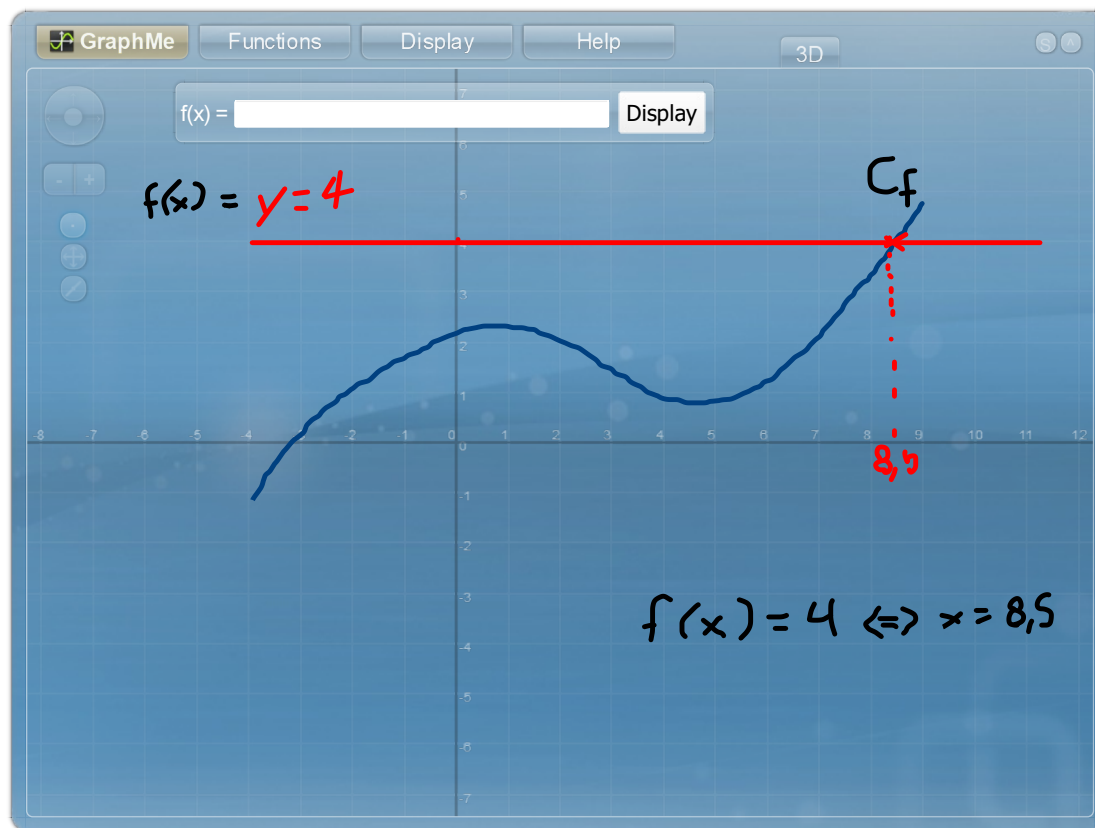
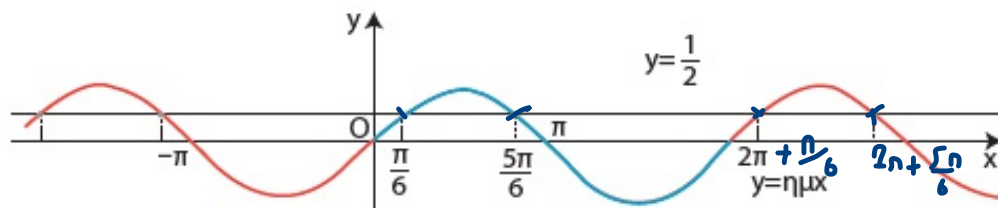




H $f(x) = \sin x$ θ i λw na $\lambda 56w$
 $z \sim f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$



$\lambda 56w$
 $\sin x = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = 3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$x = 2 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$x = 3 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{6}$$

1.3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Τριγωνομετρικές εξισώσεις λέγονται οι εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος x εμφανίζεται σε κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό(ημίτονο , συνημίτονο, εφαπτομένη ή συνεφαπτομένη).

Για να λύσουμε μια τριγωνομετρική εξίσωση θα πρέπει να την φέρουμε σε μια από τις παρακάτω μορφές:

Μορφή Εξίσωσης	Τύποι Λύσεων
$\eta\mu x = \eta\mu \theta$	$\begin{cases} x = 2κπ + \theta \\ x = 2κπ + \pi - \theta \end{cases} \text{ με } κ \in \mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \theta$	$\begin{cases} x = 2κπ + \theta \\ x = 2κπ - \theta \end{cases} \text{ με } κ \in \mathbb{Z}$
$\epsilon\phi x = \epsilon\phi \theta$	$x = κπ + \theta, \text{ με } κ \in \mathbb{Z}$
$\sigma\phi x = \sigma\phi \theta$	$x = κπ + \theta, \text{ με } κ \in \mathbb{Z}$

Καθένας από τους προηγούμενους τύπους λύσεων δίνει άπειρες λύσεις

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \quad \leftarrow \theta$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \quad \leftarrow \theta$$

1. Η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$

- Αν το $\alpha > 1$ ή $\alpha < -1$ δεν έχει λύσεις αφού $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$.
- Αν $-1 \leq \alpha \leq 1$ τότε έχει λύσεις.

Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = \alpha$, αν δηλαδή ισχύει $\eta\mu\theta = \alpha$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\eta\mu x = \alpha \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\theta$$

$$\begin{aligned} x &= 2k\pi + \theta \\ &\text{ή} \\ x &= 2k\pi + (\pi - \theta) \end{aligned}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Άσκηση

1) α) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$ επίσης $\eta\mu \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ άρα $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \\ 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

β) $2\eta\mu x = \sqrt{3}$ $\Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{3}$ θ

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \\ 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

γ) $3\eta\mu x - 5 = 0 \Leftrightarrow 3\eta\mu x = 5 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{5}{3}$ > 1 άρα αδύνατο

δ) $\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{2} & k \in \mathbb{Z} \\ 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

επειδή $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

2. Η εξίσωση $\sin x = a$

- Αν το $a > 1$ ή $a < -1$ δεν έχει λύσεις αφού $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Αν $-1 \leq a \leq 1$ τότε έχει λύσεις.

Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης $\sin x = a$, αν δηλαδή ισχύει $\sin \theta = a$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \theta \quad \begin{array}{l} x = 2k\pi + \theta \\ \text{ή} \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi - \theta \end{array} \quad \hat{=} \quad x = 2k\pi \pm \theta$$

Παράδειγμα 2.

$$\alpha) \sin x = \sin \frac{5\pi}{12} \quad \checkmark \theta \quad \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{12} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\beta) 2\sin x = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark \theta \quad \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \gamma, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\delta) 6\sin x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow 6\sin x = 3 \quad \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{6} \quad \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\checkmark \theta \quad \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \gamma, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\epsilon) 3\sin x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow 3\sin x = 4 \quad \Leftrightarrow \sin x = \frac{4}{3} > 1 \quad \text{Αδύνατο}$$

$$\zeta) \sqrt{2}\sin x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \sin x = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \quad \text{ηταν οτιναι}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \checkmark \theta \quad \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\eta) 3\sin x + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow 3\sin x = 1 - 1 \quad \Leftrightarrow 3\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \sin x = 0$$

$$\checkmark \theta \quad \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ -2k\pi - \frac{\pi}{2} = (2k-1)\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\checkmark \theta \quad \Leftrightarrow \sin 0 = 1 \quad \Leftrightarrow \sin x = \sin 0 \quad \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm 0 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta) 2\sin x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow 2\sin x = 2 \quad \Leftrightarrow \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin 0 \quad \checkmark \theta \quad \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm 0 \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow x = 2k\pi$$

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \alpha$

Γενικότερα, αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\varepsilon\varphi x = \alpha$, αν δηλαδή ισχύει $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι:

$$\varepsilon\varphi x = \alpha \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ο ίδιος τύπος λύσεων ισχύει και για την εξίσωση $\sigma\varphi x = \alpha$

Ασκηση 3

$$a) \quad \varepsilon\varphi x = 1 \quad \begin{array}{l} \text{εφ } \frac{\pi}{4} = 1 \\ \leftarrow \theta \end{array} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \sqrt{3}\sigma\varphi x - 1 &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sigma\varphi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow \sigma\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \begin{array}{l} \text{σφ } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \leftarrow \theta \end{array} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ανακεφαλαίωση :

• Μεθοδολογία

- 1) Λύνω ως προς τον τριγωνομετρικό αριθμό
- 2) Βρίσκω μία λύση του
- 3) Εφαρμόζω τον τύπο.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Απαλοιφή του προσήμου "πλην" (-) μπροστά
απο τριγωνομετρικό αριθμό

θυμάμαι :

- ημω = ημ(-ω)
- συνω = συν(π-ω)
- εφω = εφ(-ω)
- σφω = σφ(-ω)

Άσκηση 4

$$\begin{aligned}
 \alpha) \quad \eta \mu x &= -\frac{1}{2} \quad \xLeftrightarrow[\text{ημ}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}]{\text{red}} \quad \eta \mu x = -\eta \mu \frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \eta \mu x = \eta \mu \left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \xleftarrow[\theta]{\text{red}} \\
 &\Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta) \quad \sigma \upsilon \nu x &= -\frac{1}{2} \quad \xLeftrightarrow[\sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}]{\text{red}} \quad \sigma \upsilon \nu x = -\sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\
 &\Leftrightarrow \quad \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu \frac{2\pi}{3} \quad \xleftarrow[\theta]{\text{red}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Η/Ω : μελέτη 3.5 "τριγωνομετρικές εξισώσεις"
(απο pdf καλύτερα)

Ασκήσεις:

σχολικό βιβλίο σελ. 88 ασκ. 1,2,3,4,5,6

* για των 5 και 6 άβηηδν

Θυμόμαι:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

2° Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

$$\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Λύω το καθ' ένα ως προς x

Απ. $2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow$$

$$x = k\pi + \frac{2\pi}{24} - \frac{3\pi}{24} \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{24}$$

1 λύση

$$\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$$

2 λύση

$$\Leftrightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{24}$$

2° Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΣΗ

$$\sigma\upsilon\nu 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 2x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$x = k\pi \pm \frac{5\pi}{12} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ΑΣΚΗΣΗ

$$α) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

λύω ως προς x κάθε περίπτωση

Άρα

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 0x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12} \quad \text{Αδύνατο}$$

$$\vee \quad x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x + x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{12} \quad \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{24}$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$β) \varepsilon\psi\exists x = \varepsilon\psi\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Περιορισμός (όμοια και όχι $\varepsilon\psi\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$)

$$| - | \quad \varepsilon\psi\exists x \quad \text{όριζ. ελα. υτα}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x \neq \sin \frac{\pi}{2} \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

Άρα $\varepsilon\psi\exists x = \varepsilon\psi\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\exists x = k\pi + x - \frac{\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x - x = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \quad \vee \quad \text{λύω}$$

(εξισώσεις με τους περιορισμούς)

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad \cdot 12 \quad \Leftrightarrow 6k\pi - \pi = 4\lambda\pi + 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 6k\pi - 4\lambda\pi = 3\pi$$

$$\Leftrightarrow 2\cancel{\pi}(3k - 2\lambda) = 3\cancel{\pi}$$

$$\Leftrightarrow 3k - 2\lambda = \frac{3}{2} \quad \text{Αποπ. γιατί λ, κ Ακέραιοι}$$

Άρα είναι αδύνατο (όμοια και για τους περιορισμούς του $\varepsilon\psi\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$)

$$\delta) \cos 2x + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\cos 2x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \sin\left(\pi - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \sin\left(\pi - x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \sin\left(\frac{4\pi}{3} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{4\pi}{3} - x \\ 2k\pi - \left(\frac{4\pi}{3} - x\right) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Λύνω τους καίτοι η εξίσωση
 $\vdots$ ω/ ηρως x

$$\bullet \quad 2x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} - x \Leftrightarrow 3x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \\ \vdots \quad \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{4\pi}{9}$$

$$\bullet \quad 2x = 2k\pi - \frac{4\pi}{3} + x \Leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{4\pi}{3}$$

$$\delta) \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \\ 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Λύνω τους καίτοι η εξίσωση
 ω ηρως x

$$\bullet \quad 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{36}$$

✓

$$\bullet \quad 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x$$

$$\Leftrightarrow 2x - x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$\varepsilon) \quad 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow \underline{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 - 2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 0}$$

καινο παράγωγα

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x (\underline{\eta\mu x - 1}) + \underline{\eta\mu x - 1} = 0$$

καινο παράγωγα

$$\Leftrightarrow (\eta\mu x - 1) \cdot (2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$$

ήρ-

$$\eta\mu x - 1 = 0$$

$$\vee \quad 2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$62) \quad \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sqrt{3} \cos x$$

· Αν $\cos x = 0$ τότε $\sin x = \sqrt{3} \cdot 0$
 $\Leftrightarrow \sin x = 0$ Άτοπο
 γιατί $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

· Αν $\cos x \neq 0$ τότε $\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3}$
 $\Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$

$$3) \quad 4n\mu^2 x - 8n\mu x + 3 = 0$$

$$\Theta \in \mathbb{Z} \quad y = n\mu x$$

$$\text{ipr} \quad 4y^2 - 8y + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 64 - 48 = 16$$

$$\text{upr} \quad y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 4}{8} = \begin{cases} \frac{8+4}{8} = \frac{3}{2} \\ \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

δ-1

$$y = \frac{3}{2}$$

~

$$y = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n\mu x = \frac{3}{2} > 1$$

ASJ ~ ~ ~

~

$$n\mu x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow n\mu x = \frac{n}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{2k\pi + \frac{n}{6}}{n} & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{2k\pi + \pi - \frac{n}{6}}{n} = \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{6}}{n} \end{cases}$$

H/W: σ ε λ. 88 ακκ. 8, 9, 10 ; η η)