

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Η έννοια του πολυωνύμου

Έστω x μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

- Καλούμε μονώνυμο του x κάθε παράσταση της μορφής ax^n , όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός και n ένας θετικός ακέραιος.
Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

Εφαρμογή

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι μονώνυμα του x :

$$\underline{2x^5}, \quad 3x^{-2}, \quad \underline{-\frac{1}{2}x^3}, \quad 4 \cdot \frac{1}{x}, \quad \underline{\sqrt{3} \cdot x}, \quad 4\sqrt{x}, \quad \underline{-5x^2}, \quad \underline{-7}, \quad \underline{0}, \quad \underline{2x^0}$$

Μονώνυμα είναι: $2x^5$, $-\frac{1}{2}x^3$, $\sqrt{3} \cdot x$, $-5x^2$, -7 , 0 , $2x^0$

Δεν είναι μονώνυμα: $3x^{-2}$, $4 \cdot \frac{1}{x}$, $4\sqrt{x}$,

σταθερό μονώνυμο
↓
μηδενικό
↑
μονώνυμο

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

- Καλούμε **πολυώνυμο** του x κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τα μονώνυμα $\alpha_n x^n, \alpha_{n-1} x^{n-1}, \dots, \alpha_1 x, \alpha_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου και οι αριθμοί $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ **συντελεστές** αυτού. Ειδικότερα ο α_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.

Τα πολυώνυμα της μορφής α_0 , δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται **σταθερά πολυώνυμα**. Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**.

Ένα πολυώνυμο σε συμβολίζουμε $P(x), Q(x)$
κλπ.

Εφαρμογή

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμο του x :

α) $2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \sqrt{3} \cdot x - 1$ ✓

β) $x^2 - \frac{3}{x}$ ✗

γ) $2x^3 - 7\sqrt{x}$ ✗

δ) $\sqrt{a} \cdot x^2 + \frac{1}{a}x$ ✓

ε) -5 ✓ σταθερό

στ) 0 ✓ μηδενικό

Όροι - Συντελεστές

Εστω ένα πολυώνυμο:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- Τα μονώνυμα $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ λέγονται όροι του πολυωνύμου.
- Οι αριθμοί $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ λέγονται συντελεστές του πολυωνύμου.
- Ειδικότερα, ο αριθμός a_0 λέγεται σταθερός όρος του πολυωνύμου.

Βαθμός πολυωνύμου

Βαθμό ενός πολυωνύμου $P(x)$ ονομάζουμε τον μεγαλύτερο εκθέτη του x που εμφανίζεται στο πολυώνυμο, με την προϋπόθεση ότι ο συντελεστής του είναι διάφορος του μηδενός. Δηλαδή το πολυώνυμο:

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

με $a_k \neq 0$ έχει βαθμό ίσο με k .

Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0 (μηδέν). π.χ. $P(x) = 5$

Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός. π.χ. $P(x) = 0$

Εφαρμογή

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -3x^4 + \sqrt{5} \cdot x^2 - \frac{4}{9}x + 6$. Να γράψετε τους όρους, τους συντελεστές, τον σταθερό όρο και τον βαθμό του πολυωνύμου.

$$P(x) = \underline{-3x^4} + \underline{\sqrt{5}x^2} - \underline{\frac{4}{9}x} + \underline{6}$$

4 όροι

συντελεστές : $-3, \sqrt{5}, -\frac{4}{9}, 6$

σταθερός όρος : 6

* Το σταθερό όρο για $x=0$
 $P(0) = 6$

βαθμός πολυωνύμου : 4ος βαθμός

Βαθμός πολυωνύμου που έχει συντελεστές με παράμετρο

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x + \lambda - 2$$

Να βρείτε τον βαθμό του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x + \lambda - 2$$

• Για να είναι 3^{ος} βαθμού πρέπει

$$\lambda^3 - 4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) \neq 0$$

$$\text{άρα για } \lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 2 \text{ και } \lambda \neq -2$$

• Αν $\lambda = 0$ έχουμε $P(x) = 0x^3 + 0x + 0 - 2$
 $\Leftrightarrow P(x) = -2$ μηδενικό: βαθμός
ως σταθερό

• Αν $\lambda = 2$ έχουμε $P(x) = 0x^3 - 0x + 2 - 2$
 $\Leftrightarrow P(x) = 0$ δεν έχει βαθμό
ως μηδενικό

• Αν $\lambda = -2$ έχουμε $P(x) = 0x^3 + 8x - 2 - 2$
 $\Leftrightarrow P(x) = 8x - 4$ 1^{ος} βαθμού
γιατί $x = x^1$

Ισότητα πολυωνύμων

Ορισμός

Έστω δύο πολυώνυμα:

$$P(x) = a_\mu x^\mu + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{και} \quad Q(x) = \beta_\nu x^\nu + \dots + \beta_1 x + \beta_0$$

με $\mu \geq \nu$. Θα λέμε ότι τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι **ίσα**, όταν ισχύουν συγχρόνως:

$$a_0 = \beta_0, \quad a_1 = \beta_1, \quad \dots, \quad a_\nu = \beta_\nu \quad \text{και} \quad a_{\nu+1} = a_{\nu+2} = \dots = a_\mu = 0$$

π.χ.

Τα πολυώνυμα:

$$P(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{και} \quad Q(x) = \beta_3 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$$

είναι ίσα όταν:

$$a_0 = \beta_0, \quad a_1 = \beta_1, \quad a_2 = \beta_2, \quad a_3 = \beta_3 \quad \text{και} \quad a_4 = a_5 = 0$$

Εφαρμογή

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = (a^2 - 4)x^3 + (a^2 + 2a)x^2 - a^2 x + \underline{3a - 8}$$

και:

$$Q(x) = (3a + 2)x^2 - 2ax + \underline{a - a^2}$$

σταθεροί
όροι

Να βρείτε για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Για να είναι $P(x) = Q(x)$ πρέπει

$$\cdot \quad 3a - 8 = a - a^2 \quad (\text{σταθεροί όροι}) \quad \Leftrightarrow \underline{a = 2} \vee \underline{a = -4}$$

$$\cdot \quad -a^2 = -2a \quad (\text{συντελεστής } x) \quad \Leftrightarrow \underline{a = 0} \vee \underline{a = 2}$$

$$\cdot \quad a^2 + 2a = (3a + 2) \quad (\text{συντελεστής } x^2) \quad \Leftrightarrow \underline{a = -1} \vee \underline{a = 2}$$

$$\cdot \quad a^2 - 4 = 0 \quad (\text{συντελεστής } x^3 \text{ που έχει μόνο } P(x)) \quad \Leftrightarrow \underline{a = 2} \vee \underline{a = -2}$$

Και οι 4 παραπάνω ισότητες επαληθεύονται
ταυτόχρονα για $\boxed{a = 2}$

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου - Ρίζα πολυωνύμου

- Εστω ένα πολυώνυμο:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Αν αντικαταστήσουμε στο πολυώνυμο το x με μία τιμή $p \in \mathbb{R}$, τότε ο αριθμός που προκύπτει λέγεται **αριθμητική τιμή** (ή απλά τιμή) του πολυωνύμου για $x = p$. Δηλαδή ο αριθμός:

$$P(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

είναι η τιμή του $P(x)$ για $x = p$.

Αν ισχύει $P(p) = 0$, τότε ο αριθμός p λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου.

Παρατηρούμε τα εξής:

- Το σταθερό πολυώνυμο, π.χ. $P(x) = c$ έχει την ίδια τιμή

$$\text{π.χ. } P(x) = c, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$P(2021) = c \dots$$

- Όλα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές

Εφαρμογή

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

α) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = -3$.

β) Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 1, -1 και -2 είναι ρίζες του $P(x)$.

Λύση

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{aligned} \alpha) \text{ Για } x = -3 \text{ έχουμε } P(-3) &= (-3)^3 - 2(-3)^2 - 5(-3) + 6 \\ &= -27 - 2 \cdot 9 + 15 + 6 \\ &= -27 - 18 + 15 + 6 \\ &= -24 \end{aligned}$$

Άρα η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = -3$ είναι $P(-3) = -24$

β) Για να είναι ένας αριθμός ρίζα του $P(x)$ πρέπει να είναι η τιμή το P γινόμενο. Δηλ.

$$\cdot \text{ για } x = 1 \quad P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0 \quad \text{Άρα } x = 1 \text{ ρίζα του } P(x)$$

$$\cdot \text{ για } x = -1 \quad P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 = -1 - 2 + 5 + 6 = 8 \neq 0 \quad \text{Δεν είναι ρίζα}$$

$$\cdot \text{ για } x = -2 \quad P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0 \quad \text{Άρα } x = -2 \text{ ρίζα του } P(x)$$

Σταθερός όρος και άθροισμα συντελεστών πολυωνύμου

Έστω ένα πολυώνυμο:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Παρατηρούμε ότι:

$$P(0) = a_n \cdot 0 + a_{n-1} \cdot 0 + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$$

και:

$$P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

Δηλαδή:

- η τιμή $P(0)$ ισούται με τον σταθερό όρο a_0 του $P(x)$,
- η τιμή $P(1)$ ισούται με το άθροισμα $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ των συντελεστών του $P(x)$.

Εφαρμογή

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)^{2017} - x^{2018}$. Να βρείτε:

α) τον σταθερό όρο του $P(x)$,

β) το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$.

$$P(x) = (x-1)^{2017} - x^{2018}$$

α) υπολογίζω για τον σταθ. όρο το $P(0)$

$$P(0) = (0-1)^{2017} - 0^{2018} = (-1)^{2017} = -1$$

β) υπολογίζω για το άθροισμα των συντελεστών

$$\text{το } P(1) = (1-1)^{2017} - 1^{2018} = 0 - 1 = -1$$

Πράξεις με πολυώνυμα (το αλφάβητο είναι πολ.ώνυμο)

Εφαρμογή

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - 2x$ και $Q(x) = x^3 + 3x - 1$. Να βρείτε τα παρακάτω πολυώνυμα και να προσδιορίσετε τον βαθμό τους:

α) $xP(x) - 2Q(x)$

β) $P(x+2)Q(x^2)$

$P(x) = x^2 - 2x$ και $Q(x) = x^3 + 3x - 1$
(2ος βαθμού) (3ος βαθμού)

αλλιώς. το $P(x)$ και $Q(x)$

α) $xP(x) - 2Q(x) = x(x^2 - 2x) - 2(x^3 + 3x - 1)$
 $= x^3 - 2x^2 - 2x^3 - 6x + 2$
 $= -x^3 - 2x^2 + 6x + 2$

και είναι 3ος βαθμού.

β) $P(x+2) \cdot Q(x^2)$

Υπολογίστε πρώτα $P(x+2)$ και $Q(x^2)$ άρα:

$P(x+2) = (x+2)^2 - 2(x+2) = x^2 + 4x + 4 - 2x - 4 = x^2 + 2x$

$Q(x^2) = (x^2)^3 + 3(x^2) - 1 = x^6 + 3x^2 - 1$

αντικαθ.

Άρα $P(x+2) \cdot Q(x^2) = (x^2 + 2x) \cdot (x^6 + 3x^2 - 1)$

$= x^8 + 3x^4 - x^2 + 2x^7 + 6x^3 - 2x$

$= x^8 + 2x^7 + 3x^4 + 6x^3 - x^2 - 2x$

και είναι 8ος βαθμού

ΓΕΝΙΚΑ

το $P(x) + Q(x)$ 3ος βαθμ.

το $P(x) \cdot Q(x)$ 5ος βαθμ.

**H/W: μελέτη κεφ. 4.1 και παραδείγματα από βιβλίο και pdf
ασκήσεις σελ. 131 1,2,4,5,6,7**

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:

$$(3x-2)P(x) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

↑ 1^{ος} βαθμ. ↑ 2^{ος} βαθμ. ↑ 3^{ος} βαθμ.

Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι δύο μη μηδενικά πολυώνυμα με βαθμούς μ και ν αντίστοιχα, τότε το γινόμενο:

$$P(x)Q(x)$$

έχει βαθμό $\mu + \nu$.

Το $3x-2$ είναι 1^{ος} βαθμ.

Το $P(x)$ είναι ν βαθμ.

Το $(3x-2) \cdot P(x)$ είναι $1 + \nu$ βαθμ.

$$\text{Όπως } (3x-2) \cdot P(x) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

Σηλ. το $(3x-2) \cdot P(x)$ είναι ίσο με ένα πολυώνυμο 3^{ος} βαθμ.

$$\text{Άρα } 1 + \nu = 3 \Rightarrow \nu = 2$$

Σηλ. το $P(x)$ είναι 2^{ος} βαθμ και ως 2^{ος} βαθμ.

, θα είναι της μορφής $P(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$

$$\text{Άρα } (3x-2) \cdot P(x) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

$$\Leftrightarrow (3x-2) \cdot (ax^2 + bx + \gamma) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

$$3ax^3 + 3bx^2 + 3x\gamma - 2ax^2 - 2bx - 2\gamma = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

$$\underline{3ax^3} + \underline{(3b-2a)x^2} + \underline{(3\gamma-2b)x} - \underline{2\gamma} = \underline{3x^3} - \underline{14x^2} + \underline{17x} - \underline{6}$$

Για να είναι ίσα θα πρέπει οι συντελεστές να είναι ίσοι.
Οπότε:

$$3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$3b - 2a = -14 \Leftrightarrow 3b - 2 = -14 \Leftrightarrow 3b = -12 \Leftrightarrow b = -4$$

$$3\gamma - 2b = 17 \Leftrightarrow 3\gamma - 2(-4) = 17 \Leftrightarrow 3\gamma = 17 - 8 \Leftrightarrow \gamma = 3$$

$$-2\gamma = -6 \Leftrightarrow \gamma = 3 \text{ που 'βγαίνει'}$$

$$\text{Άρα } P(x) = x^2 - 4x + 3$$

Προσδιορισμός παραμέτρων

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - \lambda)x^2 + (\lambda^2 + \lambda)x + \lambda^2 - 2\lambda - 3$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

- α) το $P(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο, β) το $P(x)$ είναι μηδενικό πολυώνυμο,
γ) το $P(x)$ έχει βαθμό μηδέν, δ) το $P(x)$ έχει ρίζα το 2,
ε) η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = -1$ είναι -3 .

α) το $P(x)$ είναι σταθερό όταν είναι μηδέν
οι συντελεστές του x^2 και του x συγχρύνονται
δλδ.

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda &= 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{\lambda = 0} \vee \lambda = 1 \vee \underline{\lambda = -1} \\ \text{και} \\ \lambda^2 + \lambda &= 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 0} \vee \underline{\lambda = -1} \end{aligned}$$

Άρα για $\lambda = 0$ ή $\lambda = -1$ το $P(x)$ σταθερό

β) Για να είναι μηδενικό, πρέπει να είναι σταθερό (δλδ. $\lambda = 0$ ή $\lambda = -1$)
και ο σταθερός όρος να είναι μηδέν
δλδ. $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$$\text{για } \lambda = 0 \quad 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3 \text{ άρα απορ.}$$

$$\text{για } \lambda = -1 \quad (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0 \text{ δεκτό}$$

Άρα για $\lambda = -1$ το $P(x)$ μηδενικό

γ) Το $P(x)$ έχει βαθμό μηδέν όταν είναι σταθερό (δλδ. $\lambda = 0$ ή $\lambda = -1$)
αλλά μη-μηδενικό (δλδ. $\lambda \neq -1$)
Άρα για $\lambda = 0$

δ) Το $P(x)$ έχει ρίζα το 2 όταν $P(2) = 0$

$$\Leftrightarrow (\lambda^3 - \lambda) \cdot 2^2 + (\lambda^2 + \lambda) \cdot 2 + \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{4} \vee \lambda = -1 \vee \lambda = 1$$

ε) Η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = -1$ είναι -3

$$\text{σημαίνει } P(-1) = -3$$

$$(\lambda^3 - \lambda) \cdot (-1)^2 + (\lambda^2 + \lambda) \cdot (-1) + \lambda^2 - 2\lambda - 3 = -3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = -2$$

H/W

6<λ. 132

6<λ. 2,3,4 6 ομείδω