4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \qquad \alpha_\nu \neq 0$$

π.χ.

$x + 5 = 0$ βαθμού $1^{ου}$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ -"- $2^{ου}$

$x^5 - 4x^4 + 2 = 0$ -"- $5^{ου}$ κλπ

Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, δηλαδή κάθε αριθμό ρ, για τον οποίο ισχύει $P(\rho) = 0$.

Η επίλυση μια εξίσωσης με τη μέθοδο αυτή στηρίζεται στην ισοδυναμία

$$P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot \ldots\ldots \cdot P_k(x)=0 \Leftrightarrow (P_1(x)=0 \quad ή \quad P_2(x)=0 \quad ή \ \ldots \ ή \quad P_k(x)=0)$$

Δηλαδή, για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x) = 0$, παραγοντοποιούμε το $P(x)$ και αναγόμαστε έτσι στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων μικρότερου βαθμού.

π.χ. $x^3 - 3x + 2 = 0$

$x^3 - x - 2x + 2 = 0$

$x(x^2-1) - 2(x-1) = 0$

$x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0$

$(x-1)[x(x+1) - 2] = 0$

$(x-1)(x^2+x-2) = 0$

άρα $x-1=0$ ή $x^2+x-2=0$

$x=1$ $\quad$ $x=1$ ή $x=-2$

δηλ. $x=1$ ή $x=-2$

Παράγοντας της μορφής x – ρ

Το θεώρημα που ακολουθεί μας βοηθά σε ορισμένες περιπτώσεις, στην εύρεση πρωτοβάθμιων παραγόντων.

ΘΕΩΡΗΜΑ **(ακέραιων ριζών)** Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° Να λυθεί η εξίσωση $x^3-3x^2+x+\underline{2}=0$

Ο σταθερός όρος είναι το 2 και έχει ακέραιους διαιρέτες το $\pm 1, \pm 2$: πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης

Με το σχήμα Horner εξετάζουμε αν κάποιοι από τους διαιρέτες μηδενίζει το $P(x)=x^3-3x^2+x+2$ (δηλ. έχει υπόλοιπο μηδέν)

(Εναλλακτικά βρίσκω το $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$ ποιο κάνει μηδέν και κάνω την με το $x-\rho$ με σχήμα Horner)

για $x=1$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ \downarrow & 1 & -2 & -1 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & \boxed{1} & \end{array}$$

$P(1)=1\neq 0$
άρα το 1 δεν είναι ρίζα

για $x=-1$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & -1 \\ \downarrow & -1 & 4 & -5 & \\ \hline 1 & -4 & 5 & \boxed{-3} & \end{array}$$

$P(-1)=-3\neq 0$
άρα το -3 δεν είναι

για $x=2$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 2 \\ \downarrow & 2 & -2 & -2 & \\ \hline 1 & -1 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$P(2)=0$
άρα το 2 είναι ρίζα

(Επομένως το $x-2$ παράγοντας του $P(x)$)

άρα η παραγοντοποίηση είναι:

$$x^3-3x^2+x+2=(x-2)(x^2-x-1)$$

Επομένως $\quad x^3-3x^2+x+2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \quad x-2=0 \quad ή \quad x^2-x-1=0$$

$$x=2 \qquad x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad ή \quad x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ρίζες / λύσεις της εξίσωσης

2° Να λυθεί η εξίσωση $x^4+5x^3+9x^2+8x+4=0$.

ΛΥΣΗ

Έστω $P(x)=x^4+5x^3+9x^2+8x+4$

οι διαιρέτες του σταθερού όρου 4 είναι : $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Επειδή το $P(x)$ έχει θετικούς συντελεστές
δεν μπορεί να έχει θετικές ρίζες άρα αποκλείω 1, 2, 4

Οπότε πιθανές ρίζες $-1, -2, -4$

- για το $x=-1$, το $P(-1)=(-1)^4+5(-1)^3+9(-1)^2+8(-1)+4$
$= 1-5+9-8+4$
$= 1 \neq 0$ Άρα το -1 δεν είναι ρίζα

- για το $x=-2$. το $P(-2)=(-2)^4+5(-2)^3+9(-2)^2+8(-2)+4$
$= \cancel{16}+5(-8)+9\cdot 4-\cancel{16}+4$
$= -40+36+4=0$
Άρα το -2 είναι ρίζα του $P(x)$

Σχήμα horner για $\rho=-2$

1	5	9	8	4	-2
↓	-2	-6	-6	-4	
1	3	3	2	0	

Οπότε $P(x)=(x+2)\cdot(x^3+3x^2+3x+2)$

άρα η αρχική εξίσωση γίνεται $(x+2)\cdot(x^3+3x^2+3x+2)=0$ (1)

Επαναλαμβάνω την ίδια διαδικασία, για το $x^3+3x^2+3x+2=0$

Έστω $Q(x)=x^3+3x^2+3x+2$

Οι διαιρέτες του 2 είναι $-1, 1, -2, 2$

Τα $-1, 1, 2$ τα αποκλείω γιατί δεν ήταν διαιρέτες του $P(x)$

οπότε για $x=-2$ $Q(-2)=(-2)^3+3(-2)^2+3\cdot(-2)+2$
$= -8+12-6+2=0$
άρα το -2 ρίζα του $Q(x)$

σχήμα horner $\rho=-2$

1	3	3	2	-2
↓	-2	-2	-2	
1	1	1	0	

οπότε $Q(x)=(x+2)(x^2+x+1)$

Οπότε η (1) εξίσωση $(x+2)\cdot(x+2)(x^2+x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2\cdot(x^2+x+1)=0$

$(x+2)^2=0$ ή $x^2+x+1=0$
$x+2=0$ Αδύνατη για $\Delta=-3<0$
$x=-2$
Διπλή ρίζα

Πρόσημο γινομένου

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot .... \cdot \Phi(x)$ ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), ..., \Phi(x)$ είναι της μορφής $\alpha x + \beta$ (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (τριώνυμα).

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

- Πίνακας προσήμου για το $\alpha x + \beta$ με ρ_1 ρίζα

x	$-\infty$		ρ_1		$+\infty$
$\alpha x+\beta$		ετερόσ. του α	0	ομόσημο του α	

- Πίνακας προσήμου για το $\alpha x^2+\beta x+\gamma$
  διακρίνω περιπτώσεις ανάλογα το Δ

  - Αν $\Delta > 0$ έχει δύο άνισες ρίζες ρ_1, ρ_2

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του α	0	ετερόσ. του α	0	ομόσημο του α	

  - Αν $\Delta = 0$ έχει μία διπλή ρίζα ρ_1

x	$-\infty$		ρ_1		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του α	0	ομόσημο του α	

  - Αν $\Delta < 0$ δεν έχει ρίζες

x	$-\infty$		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του α	

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δηλ. η $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει σταθερό πρόσημο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1).$$

ΛΥΣΗ

το $P(x)$ είναι ήδη παραγοντοποιημένο
με παράγοντες $x-1$
x^2+x-6
$2x^2+x+1$

Λύνω του καθε παράγοντα ως εξίσωση για να βρω ρίζες

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
- $x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=2$
- $2x^2+x+1=0 \Leftrightarrow$ Αδύνατη γιατί $\Delta<0$

x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$\alpha=1>0$ $x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\alpha=1>0$ x^2+x-6	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\alpha=2>0$ $2x^2+x+1$	$+$		$+$		$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

τα πρόσημα του $P(x)$ προκύπτουν από
το γινόμενο των άλλων προσήμων

Συμπέρασμα: για $x=-3,\ 1,\ 2$ το $P(x)=0$

για $x \in (-\infty,-3) \cup (1,2)$ το $P(x)<0$

για $x \in (-3,1) \cup (2,+\infty)$ το $P(x)>0$

H/W: μελέτη το 4.3 έως σελ. 144

ασκήσεις: σελ. 146 1 (τα 6 πρώτα)
2
4
6 i), ii)

v) $x^3+x^2-2=0$ $\iff x^3+x^2-1-1=0$

$\iff x^3-1+x^2-1=0$

$\iff (x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)=0$

$\iff (x-1)(x^2+x+1+x+1)=0$

$\iff (x-1)(x^2+2x+2)=0$

$x-1=0$ ή $x^2+2x+2=0$

$x=1$ αδύνατη γιατί $\Delta=-4<0$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

β' τρόπος

$x^3+x^2-2=0$

$x^3-x^2+2x^2-2=0$

$x^2(x-1)+2(x^2-1)=0$

$x^2(x-1)+2(x-1)(x+1)=0$

$(x-1)[x^2+2(x+1)]=0$

$(x-1)(x^2+2x+2)=0$

i) $x^3+2x^2+3x+6>0$

Έστω $P(x)=x^3+2x^2+3x+6$

Πιθανές ακέραιες ρίζες, οι διαιρέτες του 6

δηλ. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Επειδή το $P(x)$ έχει θετικούς συντελεστές
δεν γίνεται να έχει θετική ρίζα

άρα αποκλείονται $1, 2, 3, 6$

Για $x=-1$ $\quad P(-1)=(-1)^3+2(-1)^2+3(-1)+6=-1+2-3+6=4\neq 0$

άρα το -1 δεν είναι ρίζα

Για $x=-2$ $\quad P(-2)=\dots=0$ άρα το $\rho=-2$ είναι ρίζα

Οπότε σχ. Horner με το $\rho=-2$

1	2	3	6	-2
$\downarrow$	-2	0	-6	
1	0	3	$\boxed{0}$	

Άρα $P(x)=(x+2)(x^2+3)$ το $x^2+3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

οπότε μοναδική ρίζα το -2

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	
x^2+3		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

Η $P(x)>0 \Leftrightarrow x^3+2x^2+3x+6>0$ για $x\in(-2,+\infty)$

Άσκηση 1

Να λυθεί η ανίσωση $x^6-3x^4-6x^2+8\le 0$

παρατηρώ ότι οι εκθέτες είναι πολλαπλάσια του 2

Λύση

$x^6-3x^4-6x^2+8\le 0$

Θέτω $x^2=y$ άρα $y^3-3y^2-6y+8\le 0$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες, είναι οι διαιρέτες του 8
δηλ. $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

για $\rho=1$ σχήμα Horner

1	-3	-6	8	1
↓	1	-2	-8	
1	-2	-8	0	

άρα είναι το 1 ρίζα

οπότε $(y-1)(y^2-2y-8)\le 0$

λύνω $y^2-2y-8=0$
$\Leftrightarrow y=4$ ή $y=-2$

άρα έχουμε ρίζες $y=1$ ή $y=-2$ ή $y=4$

$x^2=1$ $\qquad x^2=-2$ $\qquad x^2=4$

$x=-1$ ή $x=1$ $\qquad$ Αδύνατη $\qquad x=-2$ ή $x=2$

Πίνακας προσήμων για: $(y-1)(y^2-2y-8)$

y		-2		1		4	
$y-1$	−		−	0	+		+
y^2-2y-8	+	0	−		−	0	+
$(y-1)(y^2-2y-8)$	−	0	+	0	−	0	+

άρα οι λύσεις της $(y-1)(y^2-2y-8)\le 0$

είναι $y\in(-\infty,-2]\cup[1,4]$

δηλ. $y\le -2$ ή $1\le y\le 4$

$\Leftrightarrow x^2\le -2$ ή $1\le x^2\le 4$

Αδύνατη $\qquad \sqrt{1}\le\sqrt{x^2}\le\sqrt{4}$

$1\le |x|\le 2$

$|x|\ge 1$ $\qquad |x|\le 2$

$x\le -1$ ή $x\ge 1$ $\qquad -2\le x\le 2$

Άσκηση 2

Το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\lambda x^2-20x+\mu$ έχει παράγοντα το $x+2$, → Όταν έχει παράγ. το $x-\rho$ ισχύει $P(\rho)=0$

ενώ διαιρούμενο με το $x-1$ αφήνει υπόλοιπο -15 → Η διαίρεση με $x-\rho$ μας δίνει υπόλοιπο $P(\rho)$

α) Να βρείτε τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

β) Να λυθεί η $P(x)<0$

Λύση

α) Αφού έχει παράγοντα $x+2$ τότε $\rho=-2$

ισχύει $P(-2)=0 \Leftrightarrow 2(-2)^3+\lambda(-2)^2-20\cdot(-2)+\mu=0$

$$-16+4\lambda+40+\mu=0$$

$$4\lambda+\mu=-24 \quad (1)$$

Αφού το $P(x)$ διαιρείται με το $x-1$ και έχει $υ=-15$

ισχύει $P(1)=-15 \Leftrightarrow 2\cdot 1^3+\lambda\cdot 1^2-20\cdot 1+\mu=-15$

$$2+\lambda-20+\mu=-15$$

$$\lambda+\mu=-15+20-2$$

$$\lambda+\mu=3 \quad (2)$$

Λύνω το σύστημα

$$\begin{cases}4\lambda+\mu=-24\\ \lambda+\mu=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\lambda+3-\lambda=-24\\ \mu=3-\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\lambda=-27\\ \mu=3-\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}\lambda=-9\\ \mu=12\end{cases}}$$

β) Για $\lambda=-9$ και $\mu=12$

το $P(x)=2x^3-9x^2-20x+12$

Για να λύσω την $P(x)<0$ βρίσκω ρίζες

μία ρίζα είναι $\rho=-2$ από εκφώνηση

2	−9	−20	12	−2
↓	−4	26	−12	
2	−13	6	0	

άρα $P(x)=(x+2)\cdot(\underbrace{2x^2-13x+6}_{\text{λύνω}})$

$$2x^2-13x+6=0$$

$$x=6 \quad \text{ή} \quad x=\frac{1}{2}$$

Οπότε πίνακας προσήμων

x		-2		$1/2$		6	
$x+2$	−	0	+		+		+
$2x^2-13x+6$	+		+	0	−	0	+
$P(x)$	−	0	+	0	−	0	+

Άρα το $P(x)<0$ για $x\in(-\infty,-2)\cup(\frac{1}{2},6)$

Σημεία τομής και Σχετική Θέση γραφικής Παράστασης μιας Πολυωνυμικής Συνάρτησης

Έστω $f(x)$ πολυωνυμ. με C_f γραφική Παράσταση

- Τα σημεία τομής της C_f με

  - τον άξονα $x'x$: λύνω $f(x)=0$,
    οι ρίζες του $\rho_1, \rho_2 --- \rho_\nu$ είναι οι τετμημένες (τα x) των σημείων τομής, δηλ. $(\rho_1, 0)$, $(\rho_2, 0)$ ----

  - τον άξονα $y'y$: βρίσκω το $f(0)$
    και το σημείο τομής είναι το $(0, f(0))$

- Σχετική Θέση της C_f με τον άξονα $x'x$

  - η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$ όταν $f(x)>0$
  - η C_f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ όταν $f(x)<0$

    δηλ. λύνω τις ανισώσεις

υποπεριπτώσεις

  - η C_f δεν βρίσκεται πάνω $x'x$ όταν $f(x)\leq 0$
  - η C_f δεν βρίσκεται κάτω $x'x$ όταν $f(x)\geq 0$

H/W σελ. 147-148

α ομάδα : ασκ. 5, 6, 7, 8, 9

β ομάδα : ασκ. 1, 2

2. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ το $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 16x - 12$ έχει παράγοντες τους $x+1$ και $x-2$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 16x - 12$

Αφού έχει παράγοντες το $x+1$ και το $x-2$

Οι διαιρέσεις του $P(x):(x+1)$ και $P(x):(x-2)$ δίνουν υπόλοιπο μηδέν.

Και επειδή είναι της μορφής $x-\rho$ το $\upsilon = P(\rho)$

άρα για το $x+1$ $(\rho=-1)$: $P(-1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (-1)^4 + \alpha(-1)^3 + \beta(-1)^2 - 16(-1) - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \alpha + \beta + 16 - 12 = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \beta = -5$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 5 \quad (1)$$

για το $x-2$ $(\rho=2)$: $P(2)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^4 + \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 + 8\alpha + 4\beta - 32 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\alpha + 4\beta = 28 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 7 \quad (2)$$

Λύνω το σύστημα (1) και (2) $\begin{cases} \alpha - \beta = 5 \\ 2\alpha + \beta = 7 \end{cases}$ προσθέτω κατά μέλη

$$\Leftrightarrow \alpha \cancel{-\beta} + 2\alpha \cancel{+\beta} = 5 + 7$$

$$3\alpha = 12$$

$$\boxed{\alpha = 4}$$

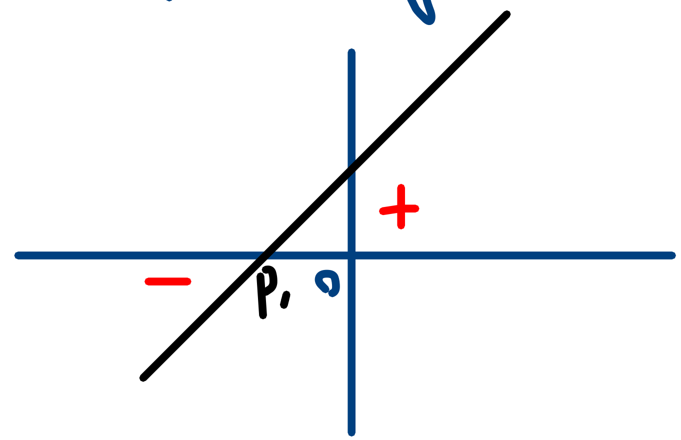
και από (2) $2 \cdot 4 + \beta = 7 \Leftrightarrow \beta = 7 - 8 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -1}$

Συναρτήσεις - γραφική - πίνακας προσήμου

1ου βαθμού $f(x) = \alpha x + \beta$ $\quad$ $\alpha \neq 0$ με ρίζα ρ_1

αν $\alpha > 0$

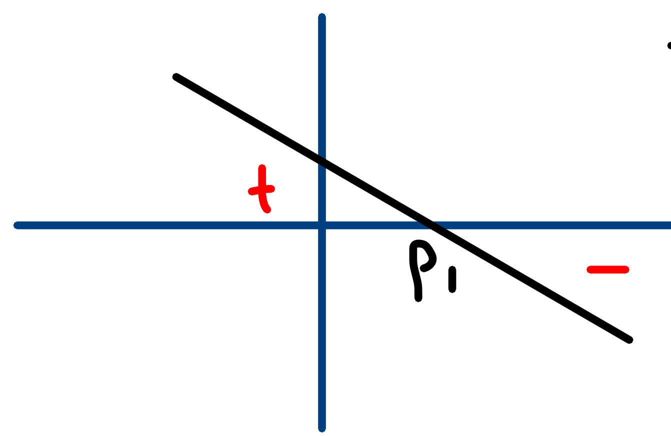
x		ρ_1	
$f(x)$	$-$	0	$+$



$f \uparrow \mathbb{R}$

αν $\alpha < 0$

x		ρ_1	
$f(x)$	$+$	0	$-$



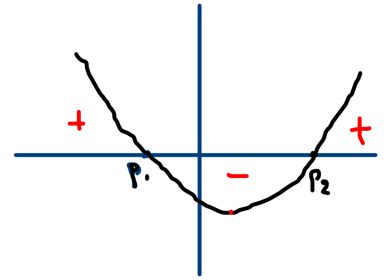
$f \downarrow \mathbb{R}$

2ου βαθμού $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha \neq 0$

• Αν $\Delta > 0$ ρίζες τα ρ_1, ρ_2

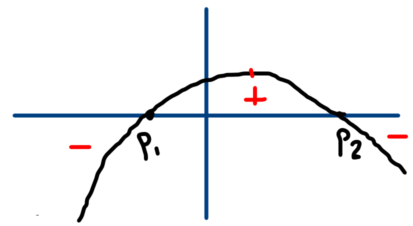
αν $\alpha>0$

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



αν $\alpha<0$

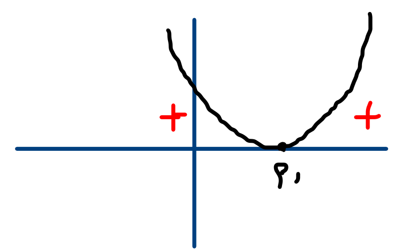
x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



• Αν $\Delta = 0$ ρίζα ρ_1

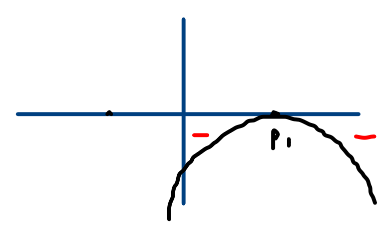
αν $\alpha>0$

x	$-\infty$		ρ_1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	



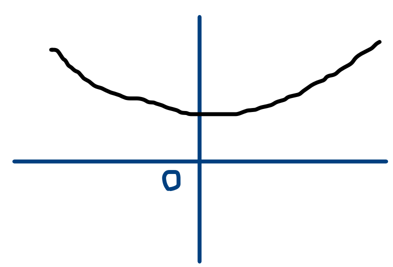
αν $\alpha<0$

x	$-\infty$		ρ_1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	



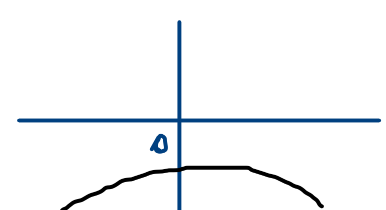
• Αν $\Delta < 0$ να μην έχει ρίζες

τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο
για κάθε $x \in \mathbb{R}$



Αν $\alpha > 0$ η $f(x) > 0$

Αν $\alpha < 0$ η $f(x) < 0$



Προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots\dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

Αν για δυο πραγματικούς αριθμούς α, β με α<β οι τιμές f(α), f(β) της συνάρτησης είναι ετερόσημες, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 μεταξύ των α, β.

Γεωμετρική Ερμηνεία

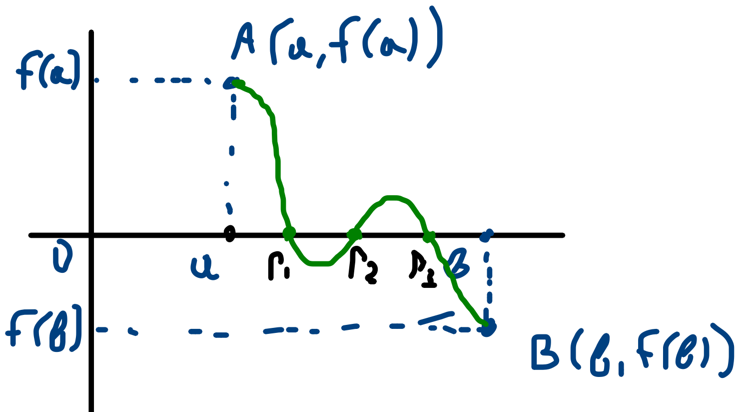
Η γραφική παράσταση της f περνά από τα σημεία A(α, f(α)) και B(β, f(β))

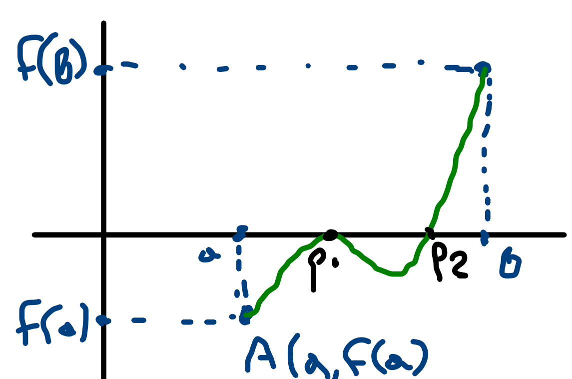
Επειδή f(α), f(β) ετερόσημα τα σημεία αυτά θα βρίσκονται εκατέρωθεν του x'x

δηλ.

αν $f(\alpha) > 0$ και $f(\beta) < 0$

αν $f(\alpha) < 0$ και $f(\beta) > 0$





ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $x^3-3x+1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα μεταξύ των αριθμών 1 και 2. Στη συνέχεια να βρεθεί μια ρίζα με προσέγγιση δεκάτου.

ΛΥΣΗ

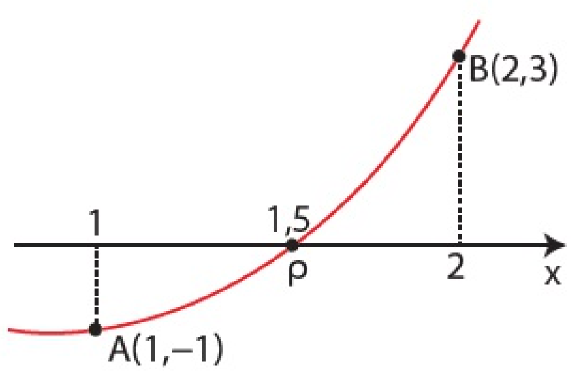
Θεωρώ $f(x) = x^3 - 3x + 1$

το $f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$

το $f(2) = 2^3 - 3\cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3 > 0$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα παραπάνω υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $(1,2)$

(δηλ. υπάρχει τουλ. ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$)



Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^3 + 2x - 2 = 0$ έχει ρίζα μεταξύ των αριθμών 0 και 1. Να προσδιορίσετε αυτή τη ρίζα με προσέγγιση εκατοστού, χρησιμοποιώντας υπολογιστή τσέπης. Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να διαπιστώσετε αν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης μεταξύ των αριθμών 1 και 2;

Θεωρώ $f(x) = x^3 + 2x - 2$ με $D_f = \mathbb{R}$

- Εξετάζω αν η $f(x)$ έχει ρίζα μεταξύ του 0 και 1

$$\left.\begin{array}{l} \text{για } x=0 \text{ το } f(0) = 0^3 + 2\cdot 0 - 2 = -2 < 0 \\ \text{για } x=1 \text{ το } f(1) = 1^3 + 2\cdot 1 - 2 = 1 > 0 \end{array}\right\} f(0),\ f(1) \text{ ετερόσημα}$$

(δηλ. $f(0)\cdot f(1) < 0$)

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f μεταξύ $(0,1)$.

(δηλ. υπάρχει τουλ. ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$)

- Εξετάζω αν η $f(x)$ έχει ρίζα μεταξύ του 1 και 2

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 > 0 \\ f(2) = 2^3 + 2\cdot 2 - 2 = 8 + 4 - 2 = 10 > 0 \end{array}\right\} f(1),\ f(2) \text{ ομόσημα}$$

δεν μπορούμε με βάση το Θεώρημα να διαπιστώσουμε αν έχει ρίζα.