4. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων, για τις διάφορες τιμές του x.

i) $P(x)=(2-3x)(x^2-x-2)(x^2-x+1)$

ii) $Q(x)=(-x^2+4)(x^2-3x+2)(x^2+x+1)$

i) $P(x)=(2-3x)\cdot(x^2-x-2)\cdot(x^2-x+1)$

άρα $2-3x=0$ ή $x^2-x-2=0$ ή $x^2-x+1=0$

$-3x=-2$ $x=2$ ή $x=-1$ Αδύνατη

$\frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}}=\frac{-2}{-3}$ γιατί $\Delta=-3<0$

$x=\frac{2}{3}$

(άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο ομόσημο του $\alpha=1>0$ οπότε $x^2-x+1>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$)

x	$-\infty$		-1		$2/3$		2	$+\infty$
$\alpha=-3<0$ $2-3x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\alpha=1>0$ x^2-x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\alpha=1$ x^2-x+1		$+$		$+$		$+$		$+$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

για $x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{2}{3},2\right)$ το $P(x)>0$

για $x\in\left(-1,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$ το $P(x)<0$

για $x=-1$, $x=\frac{2}{3}$, $x=2$ $P(x)=0$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2x^5 - 162x \le 0$ ii) $(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 9) > 0$

iii) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$ iv) $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \le 0$

i) $2x^5 - 162x \le 0$

Έστω $P(x) = 2x^5 - 162x = 2x(x^4 - 81)$
$= 2x\left[(x^2)^2 - 9^2\right] = 2x(x^2+9)(x^2-9)$

Για $P(x) = 0$ βρίσκω τις ρίζες

$\Leftrightarrow 2x(x^2+9)(x^2-9) = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 0$ ή $x^2 + 9 = 0$ ή $x^2 - 9 = 0$

$x = 0$ Αδύνατη $(x-3)(x+3) = 0$

$x^2 + 9 > 0$ $x = 3$ ή $x = -3$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Πίνακας προσήμου του $P(x)$

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2+9	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Το $P(x) \le 0$

$\Leftrightarrow 2x^5 - 162x \le 0$

όταν $x \in (-\infty, -3] \cup [0, -3]$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3+2x^2+3x+6>0$ **ii)** $x^4-6x^3+22x^2-30x+13\le 0$

iii) $x^3-3x+2<0$ **iv)** $x^4-x^3+x^2-3x-6\ge 0$

ii) Έστω $P(x)=x^4-6x^3+22x^2-30x+13$

Για $P(x)=0 \iff x^4-6x^3+22x^2-30x+13=0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες, οι διαιρέτες του 13

δηλ. ± 1, ± 13

για $x=1$ $P(1)=1^4-6\cdot 1^3+22\cdot 1^2-30\cdot 1+13=1-6+22-30+13=0$

άρα το 1 είναι ρίζα

Σχήμα horner για ρ=1

1	−6	22	−30	13	1
↓	1	−5	17	−13	
1	−5	17	−13	0	

άρα $P(x)=(x-1)(\underbrace{x^3-5x^2+17x-13})$ (1)

Έστω $Q(x)=x^3-5x^2+17x-13$

Πιθανές ακέραιες ρίζες, οι διαιρέτες του −13

δηλ. ± 1, ± 13

για $x=1$ $Q(1)=1^3-5\cdot 1^2+17\cdot 1-13=1-5+17-13=0$

άρα το 1 είναι ρίζα

Σχήμα horner για ρ=1

1	−5	17	−13	1
↓	1	−4	13	
1	−4	13	0	

άρα $Q(x)=(x-1)(x^2-4x+13)$

Οπότε (1) $P(x)=(x-1)\cdot(x-1)(x^2-4x+13)$

$\iff P(x)=(x-1)^2(x^2-4x+13)$

για $P(x)=0 \iff (x-1)^2(x^2-4x+13)=0$

$\iff (x-1)^2=0$ ή $x^2-4x+13=0$

$x-1=0$ Αδύνατη γιατί $\Delta=-36<0$

$x=1$ διατηρεί σταθερό πρόσημο

(διπλή ρίζα) $x^2-4x+13>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Πίνακας προσήμου του $P(x)$

x^2-2x+1

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	0	+
$x^2-4x+13$	+		+
$P(x)$	+	0	+

Παρατηρώ ότι $P(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η $P(x)\le 0 \iff x^4-6x^3+22x^2-30x+13\le 0$

έχει μοναδική λύση μόνο όταν $=0$

δηλ. $x=1$

7. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x'x και της γραφικής παράστασης καθεμίας από τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=3x^3-3x^2-5x-2$ **ii)** $g(x)=4x^3-3x-1$

ii) $g(x)=4x^3-3x-1$ με π.ο. $D_g=\mathbb{R}$

(Τα σημεία τομής της C_g με τον x'x θα έχουν τετμημένες τις ρίζες του $g(x)=0$)

άρα $g(x)=0 \iff 4x^3-3x-1=0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες, οι διαιρέτες του -1 δηλ. ± 1

για $x=1$ $g(1)=4\cdot 1^3-3\cdot 1-1=4-3-1=0$ άρα το 1 είναι ρίζα

Σχήμα horner με $\rho=1$

4	0	-3	-1	1
↓	4	4	1	
4	4	1	0	

άρα $g(x)=(x-1)(4x^2+4x+1)$

δηλ. η εξίσωση γίνεται $(x-1)(4x^2+4x+1)=0$ $(2x+1)^2=0$

$\iff x-1=0$ ή $4x^2+4x+1=0$

$x=1$ ή $\alpha=4$, $\beta=4$, $\gamma=1$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot 4\cdot 1=16-16=0$

άρα $x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-4}{2\cdot 4}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$ διπλή ρίζα

Άρα τα σημεία τομής της C_g με τον x'x είναι $A(1,0)$ και $B(-\frac{1}{2},0)$

8. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

$f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x$ π.ο. $D_f = \mathbb{R}$

η C_f είναι κάτω του x'x για x λύσεις της $f(x) < 0$

άρα θα λύσω τη $f(x) < 0$

Βρίσκω τις ρίζες της $f(x)$, δηλ για $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^3 - 5x^2 + 3x + 1) = 0$

$x = 0$ ή $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$

για το $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$ (1) για $x = 1$ $1^3 - 5\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 = 1 - 5 + 3 + 1 = 0$

άρα το 1 ρίζα του.

Σχήμα horner για ρ=1

1	-5	3	1	1
↓	1	-4	-1	
1	-4	-1	0	

άρα η (1) γίνεται $(x-1)(x^2 - 4x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ή $x^2 - 4x - 1 = 0$

$x = 1$ $\quad x = 2 + \sqrt{5}$ ή $x = 2 - \sqrt{5}$

$\alpha = 1$
$\beta = -4$
$\gamma = -1$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot 1(-1) = 16 + 4 = 20$

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\cancel{2}(2 \pm \sqrt{5})}{\cancel{2}} = \begin{cases} 2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} \end{cases}$

Πίνακας προσήμου

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		0		1		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
x		−		−	0	+		+		+	
x − 1		−		−		−	0	+		+	
x^2-4x-1		+	0	−		−		−	0	+	
f(x)		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Η C_f είναι κάτω από τον x'x όταν $f(x) < 0$ δηλ για $x \in (2-\sqrt{5}, 0) \cup (1, 2+\sqrt{5})$

GraphMe
Functions
Display
Help
3D
+
+
+
−
2−√5
0
1
2+√5