4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Υπάρχουν εξισώσεις, οι οποίες δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά με κατάλληλη διαδικασία η λύση τους ανάγεται στη λύση πολυωνυμικών. Τέτοιες εξισώσεις επιλύονται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° **Να λυθεί η εξίσωση** $x^2+\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x(2x-1)}=0$ (Ρητή Εξίσωση)

ΛΥΣΗ

1

η εξίσωση $x^2+\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x(2x-1)}=0$ (Περιορισμοί)

είναι μία ρητή εξίσωση, ορίζεται για $2x-1\neq 0$ και $x(2x-1)\neq 0$

δηλ. $\begin{cases} 2x-1\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \frac{1}{2} \\ x(2x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \text{ και } 2x-1\neq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\neq\frac{1}{2}\end{cases}$

Άρα η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $x\neq 0$ και $x\neq\frac{1}{2}$

δηλ $x\in\mathbb{R}-\{0,\frac{1}{2}\}$

(ή $x\in(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$)

$x^2+\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x(2x-1)}=0$ Έχει παραγ. παρανομαστές με ΕΚΠ: $x(2x-1)$

$x(2x-1)x^2+\cancel{x(2x-1)}\dfrac{2}{\cancel{2x-1}}-\cancel{x(2x-1)}\dfrac{1}{\cancel{x(2x-1)}}=x(2x-1)\cdot 0$ Απαλοιφή Παρανομαστών

$x^3(2x-1)+2x-1=0$ Πράξεις

$2x^4-x^3+2x-1=0$ Άρα έγινε πολυωνυμική

$x^3(2x-1)+2x-1=0$ * λύνεται και με horner

$(2x-1)(x^3+1)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0$ ή $x^3+1=0$

$2x=1 \qquad x^3=-1$

$\cancel{x=\frac{1}{2}} \qquad x=-1$

Απορρίπτεται λόγω περιορισμών

Άρα λύση $x=-1$

Άσκηση Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3x-10}{x^2-4} = 2x - \frac{x-3}{x-2}$$

Λύση

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3x-10}{x^2-4} = 2x - \frac{x-3}{x-2}$$

1ο Παραγ. τους παρονομαστές

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3x-10}{(x-2)(x+2)} = 2x - \frac{x-3}{x-2}$$

2ο Περιορισμοί

$x+2 \neq 0 \iff x \neq -2$

$x-2 \neq 0 \iff x \neq 2$

και ΕΚΠ $=(x-2)(x+2)$

και απαλοιφή παρονομ.

$$(x-2)\cancel{(x+2)}\frac{1}{\cancel{x+2}} - \cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}\frac{(3x-10)}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}} = (x-2)(x+2)\cdot 2x - \cancel{(x-2)}(x+2)\frac{(x-3)}{\cancel{x-2}}$$

$$x-2-(3x-10) = (x-2)(x+2)\cdot 2x - (x+2)(x-3)$$

3ο Πράξεις

$$x-2-3x+10 = (x^2-4)\cdot 2x - (x^2-3x+2x-6)$$

$$x-2-3x+10 = 2x^3-8x-x^2+3x-2x+6$$

$$2x^3-8x-x^2+3x-2x+6-x+2+3x-10=0$$

$$2x^3-x^2-5x-2=0$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες, οι διαιρ. του -2 δηλ. $\pm 1, \pm 2$

για $x=1$: $2\cdot 1^3-1^2-5\cdot 1-2 = \cancel{2}-1-5-\cancel{2} = -6 \neq 0$

άρα το 1 δεν είναι ρίζα

για $x=-1$: $2(-1)^3-(-1)^2-5(-1)-2 = -2-1+5-2=0$

άρα το -1 είναι ρίζα

Οπότε σχήμα Horner για $\rho=-1$

2	−1	−5	−2	−1
↓	−2	3	2	
2	−3	−2	$\boxed{0}$	

άρα η εξίσωση γίνεται $(x+1)\cdot(2x^2-3x-2)=0$

$\iff x+1=0$ ή $2x^2-3x-2=0$

$x=-1$ $\quad$ $\cancel{x=2}$ ή $x=-\frac{1}{2}$

Απορρ.

2° Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x} = x - 2$.

(Άρρητη εξίσωση)
$x - 2 \geq 0$
$x \geq 2$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση $\sqrt{x} = x - 2$

Περιορισμοί

επειδή έχει το $\sqrt{x}$ ορίζεται για $x \geq 0$

λύση $\sqrt{x} = x - 2$

υψώνω στο τετράγωνο για να φύγει η ρίζα

$\Leftrightarrow (\cancel{\sqrt{x}})^{\cancel{2}} = (x-2)^2$

$\Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 4$

ικανοποιούν τον περιορισμό $x \geq 0$

Εξετάζουμε αν την επαληθεύουν.

Για $x = 1$: $\sqrt{1} = 1 - 2 \Leftrightarrow 1 = -1$ δεν είναι αληθής Απορ.

Για $x = 4$: $\sqrt{4} = 4 - 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ αληθής

άρα μοναδική λύση το $x = 4$

ΣΧΟΛΙΟ Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει ότι, αν υψώσουμε τα μέλη μιας εξίσωσης στο τετράγωνο, τότε η εξίσωση που προκύπτει μπορεί να έχει και άλλες ρίζες εκτός από τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης. Είναι λοιπόν απαραίτητο σε τέτοιες περιπτώσεις να κάνουμε επαλήθευση των ριζών που βρίσκουμε και να απορρίπτουμε όσες από αυτές δεν επαληθεύουν την αρχική εξίσωση.

3° Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2x+7}-x=2$.

ΛΥΣΗ

$\sqrt{2x+7} - x = 2$

Περιορισμοί λόγω $\sqrt{2x+7}$ πρέπει $2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+7} = x+2$

Απομ. την ρίζα σε ένα μέλος

$\Leftrightarrow \left(\cancel{\sqrt{2x+7}}\right)^{\cancel{2}} = (x+2)^2$

Υψώνω και τα 2 μέλη στο τετρ. για να φύγει η ρίζα

$\Leftrightarrow 2x+7 = x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4-2x-7 = 0$

$\Leftrightarrow x^2+2x-3 = 0$

$\alpha = 1$
$\beta = 2$
$\gamma = -3$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4-4(-3) = 4+12 = 16$

$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-3$
δεκτές από περιορισμό.

Επαλήθευση στην $\sqrt{2x+7} - x = 2$

- για $x=1$: $\sqrt{2\cdot 1+7} - 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{9} - 1 = 2$
  $\Leftrightarrow 3-1 = 2$
  $\Leftrightarrow 2 = 2$ Αληθής

- για $x=-3$: $\sqrt{2(-3)+7} - (-3) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} + 3 = 2$
  $\Leftrightarrow 4 = 2$
  Αναληθής, απορ.

άρα $\boxed{x=1}$ η μοναδική λύση

4° Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1$.

ΛΥΣΗ

$$\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1$$

Περιορισμοί: $\begin{cases} \text{λόγω } \sqrt{2x+6}: \ 2x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3 \\ \text{λόγω } \sqrt{x+4}: \ x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -4 \end{cases}$ άρα $x\geq -3$

$$\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+6}=1+\sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+6}\right)^{\cancel{2}}=\left(1+\sqrt{x+4}\right)^2 \Leftrightarrow 2x+6=1+2\sqrt{x+4}+\left(\cancel{\sqrt{x+4}}\right)^{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2x+6=1+2\sqrt{x+4}+x+4$$

$$\Leftrightarrow 2x+6-1-x-4=2\sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow x+1=2\sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2=\left(2\sqrt{x+4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2=2^2\left(\cancel{\sqrt{x+4}}\right)^{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=4(x+4)$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=4x+16$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1-4x-16=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-15=0$$

$$\Leftrightarrow x=5 \text{ ή } x=-3$$ Δεκτές από περιορ.

Επαλήθευση στην αρχική εξίσωση

- $x=5$: $\sqrt{2\cdot 5+6}-\sqrt{5+4}=1 \Leftrightarrow \sqrt{16}-\sqrt{9}=1$
  $\Leftrightarrow 4-3=1$
  $\Leftrightarrow 1=1$ Αληθής

- $x=-3$: $\sqrt{2(-3)+6}-\sqrt{-3+4}=1 \Leftrightarrow \sqrt{0}-\sqrt{1}=1$
  $-1=1$ Αναληθής
  Απορρ.

Άρα η λύση της εξίσωσης $\boxed{x=5}$

H/W σελ. 147 άσκ. 10

\+ 4.3 σελ 153 ασκ. 1

ασκ. 3 i) έως vi)

Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \ (< 0)$

Αν $\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x), B(x)$ ομόσημα $\Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0$

όμοια

Αν $\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x), B(x)$ ετερόσημα $\Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0$

Άρα όταν $\frac{A(x)}{B(x)} \gtrless 0$ έχει κοινές λύσεις με το $A(x)B(x) \lesseqgtr 0$

γιατί δεν περιέχουν τις τιμές που μηδενίζει το $B(x)$

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση

$$\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x^2+x-6} > 0.$$

είναι ισοδύναμη με την $(x-1)(2x^2+x+1)(x^2+x-6) > 0$

Θεωρώ $P(x) = (x-1)(2x^2+x+1)(x^2+x-6)$

Βρίσκω τις ρίζες του $P(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2+x+1)(x^2+x-6) = 0$

$\Leftrightarrow$ $x-1=0$ ή $2x^2+x+1=0$ ή $x^2+x-6=0$

$x=1$ Αδύνατη γιατί $\Delta < 0$ $x=-3$ ή $x=2$

Πίνακας Προσήμου του $P(x)$

x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x^2+x+1$	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2+x-6	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα το $P(x) > 0$ για $x \in (-3, 1) \cup (2, +\infty)$

άρα και η

$$\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x^2+x-6} > 0$$

έχει για λύση $x \in (-3, 1) \cup (2, +\infty)$

ΣΧΟΛΙΟ Μία ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0$ αληθεύει για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως

$$A(x)\cdot B(x)\geq 0 \text{ και } B(x)\neq 0$$

δηλ. Θα εξαιρέσουμε τα x που μηδενίζουν τον παρονομαστή

Έστω για παράδειγμα η ανίσωση $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}\geq 0$. Έχουμε:

είναι ισοδύναμη με την

$(x^2-4x+3)\cdot(x^2+3x-4)\geq 0$ και $x^2+3x-4\neq 0$

(δηλ. $\Leftrightarrow x\neq -4$ και $x\neq 1$)

για $x\neq -4$ και $x\neq 1$

Θεωρώ $P(x)=(x^2-4x+3)\cdot(x^2+3x-4)$

Βρίσκω τις ρίζες της $P(x)=0$

$\Leftrightarrow (x^2-4x+3)(x^2+3x-4)=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$ ή $x^2+3x-4=0$

$\Leftrightarrow x=3$ ή $x=1$ $\quad$ $x=-4$ ή $x=1$

x	$-\infty$		-4		1		3	
x^2-4x+3		+	‖	+	0	−	0	+
x^2+3x-4		+	0	−	0	+		+
P(x)		+	‖	−	‖	−	0	+

Άρα $P(x)\geq 0$

για $x\in(-\infty,-4)\cup[3,+\infty)$

άρα και λύσεις της

αρχικής μας $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}\geq 0$

Άσκηση 1

Να λυθεί η $\dfrac{(x+2)(x^2-9)}{-x^2-2x+3} \geq 0$

Λύση

$\dfrac{(x+2)(x^2-9)}{-x^2-2x+3} \geq 0$ είναι ισοδύναμη με την

$$(x+2)(x^2-9)\cdot(-x^2-2x+3) \geq 0$$

και πρέπει το $-x^2-2x+3 \neq 0 \iff x \neq 1$ και $x \neq -3$

Για $x \neq 1$ και $x \neq -3$

Θεωρώ $P(x) = (x+2)(x^2-9)\cdot(-x^2-2x+3)$

Βρίσκω ρίζες του $P(x)=0 \iff (x+2)(x^2-9)\cdot(-x^2-2x+3)=0$

$\iff x+2=0$ ή $x^2-9=0$ ή $-x^2-2x+3=0$

$x=-2$

$(x-3)(x+3)=0$

$x-3=0$ ή $x+3=0$

$x=3$ ή $x=-3$

$\underbrace{x=1 \text{ ή } x=-3}_{\text{που δεν ορίζεται το } P(x)}$

Πίνακας προσήμου για το $P(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		1		3		$+\infty$
$x+2$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$-x^2-2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Άρα το $P(x) \geq 0$

για $x \in (-\infty,-3) \cup (-3,-2] \cup (1,3]$

που είναι και λύση της

αρχικής μας $\dfrac{(x+2)(x^2-9)}{-x^2-2x+3} \geq 0$

Άσκηση 2 Να λυθεί η ανίσωση

$$2x^2 + \frac{5x^2}{x-3} + \frac{6}{x} \leq \frac{7x^2-18}{x^2-3x}$$

Λύση

$$2x^2 + \frac{5x^2}{x-3} + \frac{6}{x} \leq \frac{7x^2-18}{x^2-3x}$$

Παραγοντ. παρονομ.

$$2x^2 + \frac{5x^2}{x-3} + \frac{6}{x} \leq \frac{7x^2-18}{\cancel{x}(x-3)}$$

Περιορισμοί: $x \neq 0$, $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

ΕΚΠ $= x(x-3)$

$$\overbrace{\frac{2x^2}{1}}^{x(x-3)} + \overbrace{\frac{5x^2}{x-3}}^{x} + \overbrace{\frac{6}{x}}^{x-3} \leq \overbrace{\frac{7x^2-18}{\cancel{x}(x-3)}}^{1}$$

Προσοχή επειδή είναι ανίσωση δεν κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών θα τα κάνουμε ομώνυμα για να γίνει ένα κλάσμα

$$\frac{2x^2 \cdot x(x-3)}{x(x-3)} + \frac{5x^2 \cdot x}{x(x-3)} + \frac{6(x-3)}{x(x-3)} \leq \frac{7x^2-18}{\cancel{x}(x-3)}$$

Πράξεις

$$\frac{2x^3(x-3)}{x(x-3)} + \frac{5x^3}{x(x-3)} + \frac{6x-18}{x(x-3)} - \frac{7x^2-18}{x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{2x^4 - 6x^3 + 5x^3 + 6x - 18 - (7x^2 - 18)}{x(x-3)} \leq 0$$

προσοχή αν έχει − παρένθεση

$$\frac{2x^4 - 6x^3 + 5x^3 + 6x - 18 - 7x^2 + 18}{x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{2x^4 - x^3 - 7x^2 + 6x}{x(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{x}(2x^3 - x^2 - 7x + 6)}{\cancel{x}(x-3)} \leq 0$$

κάνω απλοποίηση αφού έχω πάρει περιορισμούς

Οπότε

$$\frac{2x^3-x^2-7x+6}{x-3} \le 0 \quad \text{για } x\ne 0 \text{ και } x\ne 3$$

είναι ισοδύναμη του $(x-3)(2x^3-x^2-7x+6)\le 0$

Θεωρώ $P(x)=(x-3)(2x^3-x^2-7x+6)$

Βρίσκω τις ρίζες του $P(x)=0 \iff (x-3)(2x^3-x^2-7x+6)=0$

$x-3=0$ ή $2x^3-x^2-7x+6=0$

$x=3$

Το $2x^3-x^2-7x+6=0$ (1)

Πιθανές ακέραιες ρίζες, οι διαιρέτες του 6 δηλ. $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

για $x=1$ $\quad 2\cdot 1^3-1^2-7\cdot 1+6=0$ άρα 1 ρίζα

σχήμα horner για $\rho=1$

2	-1	-7	6	1
↓	2	1	-6	
2	1	-6	0	

άρα η (1) γίνεται $(x-1)(2x^2+x-6)=0$

$x-1=0$ ή $2x^2+x-6=0$

$x=1$ $\quad x=-2$ ή $x=\frac{3}{2}$

Πίνακας προσήμου του $P(x)$

x		-2		0		1		$3/2$		3	
$x-3$	$-$		$-$	‖	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x^2+x-6$	$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Το $P(x)\le 0$ για

$x\in[-2,0)\cup(0,1]\cup[\frac{3}{2},3)$

άρα και λύση της αρχικής ανίσωσης

H/W : 4.4 σελ. 153 - 154

ασκήσεις : α ομάδα 2, 4, 5, 6

β ομάδα 3 ii)

Καλή επανάληψη κεφ. 4.