

10. Να βρεθεί μια ρίζα της εξίσωσης $x^3 + 5x - 3 = 0$ στο διάστημα $(0,1)$ με προσέγγιση δεκάτου.

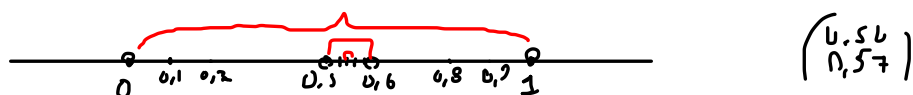
$$x^3 + 5x - 3 = 0$$

Θεωρώ $f(x) = x^3 + 5x - 3$ στο $D_f = \mathbb{R}$

για $x=0$ $\hookrightarrow f(0) = 0^3 + 5 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$
 για $x=1$ $\hookrightarrow f(1) = 1^3 + 5 \cdot 1 - 3 = 3 > 0$ } άρα $f(1) \cdot f(0) < 0$
 ελπίσματα

Άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 5x - 3 = 0$ μεταξύ 0 και 1.

(δηλ. υπάρχει τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$)



Θα βρω το $f(0,1)$... $f(0,9)$

$$f(0,1) < 0$$

$$f(0,2) < 0$$

$$f(0,3) < 0$$

$$f(0,4) < 0$$

$$f(0,5) < 0 \quad \left. \vphantom{f(0,5)} \right\} \text{ελπίσματα } f(0,5) \cdot f(0,6) < 0$$

$$f(0,6) > 0 \quad \left. \vphantom{f(0,6)} \right\} \text{άρα υπάρχει τουλάχιστον 1 ρίζα στο } (0,5, 0,6)$$

Θα βρω το $f(0,51)$... $f(0,59)$

$$f(0,51) < 0$$

$$f(0,52) < 0$$

$$f(0,53) < 0$$

$$f(0,54) < 0$$

$$f(0,55) < 0$$

$$f(0,56) < 0 \quad \left. \vphantom{f(0,56)} \right\} \text{ελπίσματα } f(0,56) \cdot f(0,57) < 0$$

$$f(0,57) > 0 \quad \left. \vphantom{f(0,57)} \right\} \text{άρα υπάρχει τουλάχιστον 1 ρίζα στο } (0,56, 0,57)$$

άρα το $p \in (0,56, 0,57)$ όπου είναι οι αριθμοί που ανήκουν σε αυτό το διάστημα, με

εξοχολογισμένη δικά του είναι 0,6

Οπότε ρίζα $p \approx 0,6$

A' OMAIAΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) \frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x^2-x} = \frac{x^2-3x+2}{x}$$

$$ii) \frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$$

$$ii) \frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$$

Παραγοντοποιώ όσους
παρονομαστές μπορώ

$$\frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)}$$

Περιορισμοί $\begin{cases} x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \\ x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \end{cases}$
ΕΚΠ = $(x-1)(x+1)$

$$\cancel{(x-1)} \cancel{(x+1)} \frac{x^2}{\cancel{x-1}} - \cancel{(x-1)} \cancel{(x+1)} \frac{2}{\cancel{x+1}} = \cancel{(x-1)} \cancel{(x+1)} \frac{4}{\cancel{(x-1)} \cancel{(x+1)}}$$

Απολοιφή Παρονομαστών

$$x^2(x+1) - 2(x-1) = 4$$

Πρήξις / Επιμερίδιξις

$$x^3 + x^2 - 2x + 2 - 4 = 0$$

$$x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

ενα δίνω

Πιθανώς ακέραιες ρίζες, οι διαιρεζέται το 2 δηλ $\pm 1, \pm 2$

για $x=1$ $1^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 = -2 \neq 0$ άρα το 1 δεν είναι ρίζα

για $x=-1$ $(-1)^3 + (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 2 = -1 + 1 + 2 - 2 = 0$ άρα το 1 ρίζα

σχήμα έχουμε με $p=1$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ \downarrow & -1 & 0 & 2 & \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 & \end{array}$$

άρα η εξίσωση γίνεται $(x+1)(x^2-2) = 0$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \quad \text{ή} \quad x^2-2=0$$

$$x=-1 \quad x^2=2$$

Απορ. από

Περιορισμοί

$$x=\sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x=-\sqrt{2}$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{x^3} = -4x$

ii) $\sqrt{3x-2} = 4$

iii) $\sqrt{5x-1} = -4$

i) $\sqrt{x^3} = -4x$ ορισμός λόγω $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$: $x^{\frac{3}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^3})^2 = (-4x)^2 \Leftrightarrow x^3 = 16x^2 \Leftrightarrow x^3 - 16x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-16) = 0$

$x^2 = 0 \quad \vee \quad x - 16 = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 16$

επαληθεύουμε ότι αρχικά

δίνει από τον ορισμό.

$x = 0 : \sqrt{0^3} = -4 \cdot 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ Αληθές

$x = 16 : \sqrt{16^3} = -4 \cdot 16 \Leftrightarrow 64 = -64$ Αψαλuthές

άρα μοναδική λύση $x = 0$

ii) $\sqrt{3x-2} = 4$ ορισμός λόγω $\sqrt{3x-2} : 3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3x-2})^2 = 4^2 \Leftrightarrow 3x-2 = 16 \Leftrightarrow 3x = 18 \Leftrightarrow x = 6$ δίνει

επαληθεύουμε ότι αρχικά : $x = 6 \quad \sqrt{3 \cdot 6 - 2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{18-2} = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{16} = 4$ Αληθές

iii) $\sqrt{5x-1} = -4$ Αδύνατο γιατί για μία ρίζα δεν γίνεται να έχει αρνητικό αποτέλεσμα

$$\text{iv) } \sqrt{x+3} = x+1 \quad \text{v) } \sqrt{x+3} = \sqrt{10-x} + 1 \quad \text{vi) } \sqrt{x} + \sqrt{x-20} = 10$$

$$\text{iv) } \sqrt{x+3} = x+1 \quad \text{Προϋποθέτουμε λίσγω } \sqrt{x+3} : x+3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3})^2 = (x+1)^2 \quad \Leftrightarrow x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -2$$

Επαληθεύουμε :

γιν $x = 1 : \sqrt{1+3} = 1+1 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2$ Αληθές

γιν $x = -2 : \sqrt{-2+3} = -2+1 \Leftrightarrow \sqrt{1} = -1$ Αψευδές.

$$\text{v) } \sqrt{x+3} = \sqrt{10-x} + 1 \quad \text{Προϋποθέτουμε } \begin{cases} \text{λίσγω } \sqrt{x+3} : x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \\ \text{λίσγω } \sqrt{10-x} : 10-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3})^2 = (\sqrt{10-x} + 1)^2$$

ήδη $-3 \leq x \leq 10$

$$\Leftrightarrow x+3 = (\sqrt{10-x})^2 + 2\sqrt{10-x} + 1^2$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 10-x + 2\sqrt{10-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow x+3-10+x-1 = 2\sqrt{10-x} \quad \Leftrightarrow 2x-8 = 2\sqrt{10-x}$$

$$\Leftrightarrow x-4 = \sqrt{10-x}$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 = (\sqrt{10-x})^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 10 - x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 - 10 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = 6 \quad \text{δικαι}$$

Επαληθεύουμε στην αρχική

· γιν $x = 1 : \sqrt{1+3} = \sqrt{10-1} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{4} = \sqrt{9} + 1 \Leftrightarrow 2 = 3+1$

$\Leftrightarrow 2 = 4$ Αψευδές

· γιν $x = 6 : \sqrt{6+3} = \sqrt{10-6} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{9} = \sqrt{4} + 1 \Leftrightarrow 3 = 2+1$

$\Leftrightarrow 3 = 3$ Αληθές

ήδη δικαι γίνε το $x = 6$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x-2}{x+1} > 0$

ii) $\frac{2x+1}{x-3} \leq 0$

iii) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \leq 0$

i) $\frac{x-2}{x+1} > 0$ ισοδύναμη $\Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0$

$\left(\begin{array}{l} \text{πρέπει } x+1 \neq 0 \\ x \neq -1 \end{array} \right)$ Βρίσκω ρίζες $(x-2)(x+1) = 0$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Πίνακας Προσήμων

x	-1	2
x-2	-	0
x+1	-	0
(x-2)(x+1)	+	-

Άρα λύση $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

ii) $\frac{2x+1}{x-3} \leq 0$ ισοδύναμη $(2x+1)(x-3) \leq 0$ και $x-3 \neq 0$

$\left(\begin{array}{l} \text{πρέπει } x-3 \neq 0 \\ x \neq 3 \end{array} \right)$ Βρίσκω ρίζες $(2x+1)(x-3) = 0$

$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ $x-3=0 \Rightarrow x=3$

Απορ.
από ημίσημο

Πίνακας Προσήμων

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
2x+1	-	0	+	+
x-3	-	-	0	+
(2x+1)(x-3)	+	0	-	+

Άρα λύση $x \in [-\frac{1}{2}, 3)$

6. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + \frac{2}{2x-1} \geq \frac{1}{x(2x-1)}$

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{2x-1} \geq \frac{1}{x(2x-1)}$$

Πλ. ρ. 6 μούρ $x(2x-1) \neq 0$
 $x \neq 0$ και $2x-1 \neq 0$
 $x \neq \frac{1}{2}$
 Εκπ. $x(2x-1)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3(2x-1)}{x(2x-1)} + \frac{2x}{x(2x-1)} - \frac{1}{x(2x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3(2x-1) + 2x - 1}{x(2x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x^3+1)}{x(2x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x} \geq 0 \quad \text{μοδός ν.} \quad (x^3+1)x \geq 0 \quad \text{για } x \neq 0 \text{ και } x \neq \frac{1}{2}$$

Βρίσκω ρίζες $(x^3+1)x = 0 \Leftrightarrow x^3+1=0 \quad \text{ή} \quad x=0$
 $x^3 = -1$
 $x = -1$
 Απορ.

Πίνακας Προσήγου

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x^3+1	-	0	+	+	+
x	-	-	0	+	+
$(x^3+1) \cdot x$	+	0	-	+	+

άρα λύση $x \in (-\infty, -1] \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$