**Κεφάλαιο 5ο**
***- Εκθετική & Λογαριθμική Συνάρτηση -***

# ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Δυνάμεις με βάση πραγματικό και εκθέτη ρητό αριθμό.

**1.** $\alpha^{\nu}=\begin{cases}1 & ,\varepsilon\alpha\nu\ \ \nu=0\\ \alpha & ,\varepsilon\alpha\nu\ \ \nu=1\\ \underbrace{\alpha.\alpha....\alpha}_{\nu\text{-φορες}} & ,\varepsilon\alpha\nu\ \ \nu\geq 2\end{cases}$ $,\alpha\in R$ και $\nu\in N$

**2.** $\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$ ή $\alpha^{\nu}=\dfrac{1}{\alpha^{-\nu}}$ $,\alpha\in R^{*}$ και $\nu\in N^{*}$

**3.** $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$ $\alpha,\beta\in R^{*}$ και $\nu\in N^{*}$

**4.** $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ $\alpha>0$ , $\mu,\nu\in Z$ και $\nu\neq 0$

Στις δυνάμεις με βάση και εκθέτη πραγματικό αριθμό ισχύουν οι ιδιότητες :

**1.** $\alpha^{x}.\alpha^{y}=\alpha^{x+y}$ **2.** $\alpha^{x}:\alpha^{y}=\alpha^{x-y}$ **3.** $(\alpha.\beta)^{x}=\alpha^{x}.\beta^{x}$ **4.** $(\alpha:\beta)^{x}=\alpha^{x}:\beta^{x}$

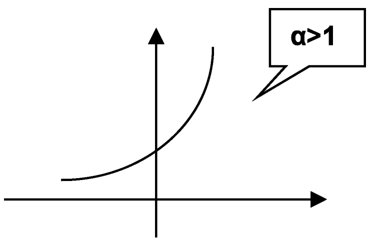
**5.** $(\alpha^{x})^{y}=\alpha^{x.y}$ **6.** $\alpha^{x}=1\Leftrightarrow\chi=0$ $(\alpha\neq 1)$ **7.** $\alpha^{x}=\alpha^{y}\Leftrightarrow\chi=y$ **8.** $\alpha>\beta$ τότε: $\begin{cases}\alpha^{x}>\beta^{x} \text{ για } \chi>0\\ \alpha^{x}<\beta^{x} \text{ για } \chi<0\end{cases}$

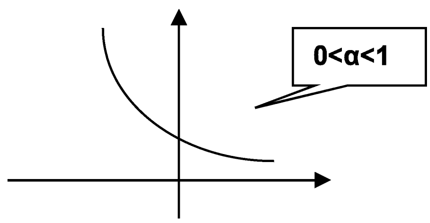
# Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

**Ορισμός**
Εκθετική συνάρτηση με βάση α ονομάζουμε την συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(\chi)=\alpha^{x}$ όπου $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$.

**Σχόλιο**
Εάν $\alpha=1$ τότε $f(\chi)=\alpha^{x}=1^{x}=1$ ,έχουμε δηλαδή σταθερή συνάρτηση

**Μελέτη της συνάρτησης $f(\chi)=\alpha^{x}$ ,$\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$.**
1.Πεδίο ορισμού της είναι όλο το σύνολο R.
2.Σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.
3.• Αν **α>1** τότε είναι γνησίως αύξουσα στο R, δηλ. κάθε $\chi_1,\chi_2$ ε R ισχύει αν $\chi_1\chi_2$ τότε $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}$ .
Έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα Οχ΄ και τέμνει τον yy' στο σημείο Α(0,1).
• Αν **0<α<1** τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο R, δηλ. κάθε $\chi_1,\chi_2$ ε R ισχύει αν $\chi_1<\chi_2$ τότε $\alpha^{x_1}>\alpha^{x_2}$
4.Έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα Οχ και τέμνει τον yy' στο σημείο Α(0,1).




**Σχόλιο**

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(\chi)=\alpha^{x}$ και $g(\chi)=\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{x}$ με $\alpha>0$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y'y.

## Παρατηρήσεις

- Η εκθετική συνάρτηση έχει την ιδιότητα : $\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2$. Στην ιδιότητα αυτή βασίζεται και η λύση των εκθετικών εξισώσεων.

- **Εκθετικές εξισώσεις** : Μια εξίσωση θα λέγεται εκθετική όταν θα εμφανίζεται σε αυτήν δύναμη με έκθετη παράσταση που περιέχει τον άγνωστο.

- **Μονοτονία και εκθετικές ανισώσεις :** Για την επίλυση των εκθετικών ανισώσεων θα εργαζόμαστε όπως και στις εκθετικές εξισώσεις για να καταλήξουμε στην επίλυση ανισώσεων της που θα βασίζεται στην μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης. Αναλυτικά διακρίνω δυο βασικές κατηγόριες :
  **i.**Εάν έχουμε : $\alpha^{f(x)} > 1 \Leftrightarrow \alpha^{f(x)} > \alpha^0 \Leftrightarrow f(x)>0$ ,εάν α>1 ή $f(x)<0$ ,εάν $0<\alpha<1$ .
  **ii.**Εάν έχουμε : $\alpha^{f(x)} > \alpha^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$ ,εάν α>1 ή $f(x)<g(x)$ ,εάν $0<\alpha<1$.

- **Ο αριθμός e :** Το σύμβολο e παριστάνει τον άρρητο αριθμό 2,71828.... και θα είναι ο αριθμός προς τον οποίο πλησιάζει η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ όταν το ν αυξάνει απεριόριστα, τείνει δηλαδή στο $+\infty$ .

- **Νόμος εκθετικής μεταβολής :** Η συνάρτηση $Q(t)=Q_0e^{ct}$ εκφράζει ένα φυσικό μέγεθος, που μεταβάλλεται με το χρόνο t.

## Ασκήσεις

Μια εξίσωση θα λέγεται εκθετική όταν θα εμφανίζεται σε αυτήν δύναμη με έκθετη παράσταση που περιέχει τον άγνωστο. Πιο αναλυτικά διακρίνουμε τις εξης κατηγόριες ασκησεων :

Οι ασκήσεις της 1ης αυτής κατηγορίας εμπεριέχουν μια έννοια την οποία θα συναντήσουμε στην επόμενη ενότητα , τον Λογάριθμο

**1.**Εαν $\alpha^{f(x)}=\beta$ με $\alpha,\beta>0$ και $\alpha\neq 1$

- Εάν $\alpha=\kappa^{\nu}$ και $\beta=\kappa^{\mu}$ τότε : $\alpha^{f(x)} = \beta \Leftrightarrow \kappa^{\nu.f(x)} = \kappa^{\mu} \Leftrightarrow \nu.f(x)=\mu \Leftrightarrow$ ......
- Εάν δεν ισχύουν οι πιο πάνω προϋποθέσεις τότε λογαριθμίζουμε:

$\alpha^{f(x)} = \beta \Leftrightarrow \log\alpha^{f(x)} = \log\beta \Leftrightarrow f(x)\log\alpha = \log\beta \Leftrightarrow f(x) = \frac{\log\alpha}{\log\beta} \Leftrightarrow$.....

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $3^{x^2+3x+5} = 27$ (1).

Λύση : (1)$\Leftrightarrow 3^{x^2+3x+5} = 3^3 \Leftrightarrow x^2+3x+5=3 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=-2$

**2.**Εάν $\alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)}$ με $\alpha,\beta>0$ και $\alpha,\beta\neq 1$

- Αν g(x)=1 τότε παίρνω την μορφή της (1).
- Αν τα α,β αναλύονται σε δυνάμεις με τις ίδιες βάσεις τότε : $(\kappa^{\nu})^{f(x)} = (\kappa^{\mu})^{g(x)} \Leftrightarrow \kappa^{\nu f(x)} = \kappa^{\mu g(x)} \Leftrightarrow \nu.f(x)=\mu.g(x) \Leftrightarrow$....
- Αν τα α,β δεν αναλύονται σε δυνάμεις με τις ίδιες βάσεις τότε λογαριθμίζω :

$\alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)} \Leftrightarrow \log_{\alpha}\alpha^{f(x)} = \log_{\alpha}\beta^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\log_{\alpha}\alpha = g(x)\log_{\alpha}\beta \Leftrightarrow f(x) = g(x)\log_{\alpha}\beta \Leftrightarrow$....

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $2^{x^2+5} = 8^{2x}$ (1).

Λύση : (1)⇔ $2^{x^2+5}=\left(2^3\right)^{2x} \Leftrightarrow 2^{x^2+5}=2^{6x} \Leftrightarrow x^2+5=6x \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow$......

**3.** Εάν $A.\alpha^{2x}+B.\alpha^{x}+\Gamma=0$ με $A,B,\Gamma\in R^*$

Θέτω $\alpha^x=\psi$ οπότε έχω :$A\psi^2+B\psi+\Gamma=0 \Leftrightarrow$..λύνω την εξίσωση..$\Leftrightarrow \psi_1=\alpha^x$ ή $\psi_2=\alpha^x$ .

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $2.9^x-3^{x+1}-135=0$ (1)

Λύση : (1)$\Leftrightarrow 2.(3^2)^x-3.3^x-135=0 \Leftrightarrow 2.(3^x)^2-3.3^x-135=0 \Leftrightarrow$..θέτω $3^x=\psi>0$..$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\psi^2-3\psi-135=0 \Leftrightarrow \psi_1=9$ ή $\psi_2=-15/2$ (απορ.)$\Leftrightarrow 3^x=9=3^2 \Leftrightarrow \chi=2$.

**4.** Εάν $A.\alpha^{2x}+B.\alpha^{x}.\beta^{x}+\Gamma.\beta^{2x}=0$ με $A,B,\Gamma\in R^*$

Η επίλυση τους ανάγεται σε εξισώσεις της μορφής (2) ως εξής :

$$A.\alpha^{2x}+B.\alpha^{x}.\beta^{x}+\Gamma.\beta^{2x}=0 \Leftrightarrow \frac{A.\alpha^{2\chi}}{\alpha^{2\chi}}+\frac{B.\alpha^{\chi}.\beta^{\chi}}{\alpha^{2\chi}}+\frac{\Gamma.\beta^{2\chi}}{\alpha^{2\chi}}=0 \Leftrightarrow A+B\frac{\beta^{\chi}}{\alpha^{\chi}}+\Gamma\frac{\beta^{2\chi}}{\alpha^{2\chi}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A+B\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\chi}+\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2\chi}=0 \Leftrightarrow \theta\epsilon\tau\omega\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\chi}=\psi>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\psi^2+B\psi+A=0 \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow \psi_1=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\chi},\ \psi_2=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\chi}.$$

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $2.25^x-3.10^x+4^x=0$ (1)

Λύση : (1)$\Leftrightarrow 2.5^{2x}-3.(2.5)^x+2^{2x}=0 \Leftrightarrow 2.5^{2x}-3.2^x.5^x+2^{2x}=0 \Leftrightarrow \frac{2.5^{2\chi}}{5^{2\chi}}-\frac{3.2^{\chi}.5^{\chi}}{5^{2\chi}}+\frac{2^{2\chi}}{5^{2\chi}}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2-3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\chi}+\left(\frac{2}{5}\right)^{2\chi}=0 \Leftrightarrow \theta\epsilon\tau\omega\left(\frac{2}{5}\right)^{\chi}=\psi>0 \Leftrightarrow \psi^2-3\psi+2=0 \Leftrightarrow \psi_1=1 \text{ ή } \psi_2=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x}=1 \text{ ή } \left(\frac{2}{5}\right)^{x}=2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x}=\left(\frac{2}{5}\right)^{0} \text{ ή } \log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{2}{5}\right)^{x}=\log_{\frac{2}{5}}2 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\log_{\frac{2}{5}}2$$

**5.** Εάν $[f(x)]^{g(x)}=1$ με $f(x)>0$ : Έχουμε $[f(x)]^{g(x)}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=0 \\ \eta \\ f(x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow$....

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $\left(x^2-3x+2\right)^{x^2-2x}=1,\ x>2\ \eta\ x<1$ (1).

Λύση : (1)$\Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)^{x^2-2x}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x=0 \\ x^2-3x+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ή } x=2 \text{(απορ.)} \\ x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ ή } x=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**Παράδειγμα 1**

Να προσδιοριστεί ο $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^{x}$ ,$\alpha\neq-1$.

α)Να ορίζεται σε όλο το σύνολο R .
β)Να είναι γνησίως αύξουσα στο R
γ)Να είναι γνησίως φθίνουσα στο R.
δ)Να είναι "1-1".

***Λύση***

α)Επειδή η συνάρτηση που μας δίνεται είναι μια εκθετική γνωρίζουμε ότι για να ορίζεται θα πρέπει η βάση να είναι θετικός αριθμός ,δηλαδή :

$$\frac{α-2}{α+1} > 0 \Leftrightarrow (α-2)(α+1)>0 \Leftrightarrow [α-2>0 \text{ και } α+1>0] \text{ ή } [α-2<0 \text{ και } α+1<0]$$

$$\Leftrightarrow [\, α>2 \text{ και } α>-1] \text{ ή } [α<2 \text{ και } α<-1] \Leftrightarrow α<-1 \text{ ή } α>2.$$

Η βάση ακόμα θα πρέπει να είναι διάφορη της μονάδας πράγμα το οποίο όμως ισχύει για κάθε α ,αφού $α-2 \neq α+1$ για κάθε $α \in R$.

β)Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα όταν : $\frac{α-2}{α+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{α-2}{α+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{α-1} > 0 \Leftrightarrow α-1<0 \Leftrightarrow α<1.$

γ)Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα όταν :

$$0 < \frac{α-2}{α+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{α-2}{α+1} > 0 \text{ και } \frac{α-2}{α+1} < 1 \Leftrightarrow [α< -1 \text{ ή } α>2\,] \text{ και } α>1 \Leftrightarrow α>2 .$$

δ) Μια εκθετική συνάρτηση όταν ορίζεται στο R είναι "1-1". Δηλαδή θα πρέπει η βάση να είναι θετική και διάφορη του 1 ,δηλαδή $0 < \frac{α-2}{α+1} \neq 1$ .

Την περίπτωση όμως αυτή την εξετάσαμε στο ερώτημα (α) άρα η συνάρτηση θα είναι "1-1" στο διάστημα που ορίζεται ως εκθετική δηλαδή όταν $α<-1$ ή $α>2$ .

**Παράδειγμα 2**

Να λυθεί η εξίσωση : $5^{2x-3}+3.5^{x}=80$ .

***Λύση***

Έχουμε : $5^{2x-3}+3.5^{x}=80 \Leftrightarrow \frac{5^{2x}}{5^3}+3.5^{x}=80 \Leftrightarrow$ θέτω $5^{x}=ψ>0$ τότε $5^{2x}=ψ^2 \Leftrightarrow \frac{ø^2}{125}+3ψ=80 \Leftrightarrow ψ^2+375ψ-10000=0$

$\Leftrightarrow ψ_1=25$ ή $ψ_2=-400$ (απορ.)$\Leftrightarrow 5^{x}=25=5^2 \Leftrightarrow χ=2.$

**Παράδειγμα 3**

Να λυθούν οι εξισώσεις : α)$5.9^{x}-3.6^{x}-2.4^{x}=0$ ,β) $9^{x+1}-27.3^{x}=0$ (1) .

***Λύση***

α)Έχουμε : $5.9^{x}-3.6^{x}-2.4^{x}=0 \Leftrightarrow 5.(3^2)^{x}-3.(2.3)^{x}-2.(2^2)^{x}=0 \Leftrightarrow 5.3^{2x}-3.2^{x}.3^{x}-2.2^{2x}=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{5.3^{2x}}{2^{2x}} - \frac{3.2^{x}.3^{x}}{2^{2x}} - \frac{2.2^{2x}}{2^{2x}} = 0 \Leftrightarrow 5\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 3\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{èÝôù } \left(\frac{3}{2}\right)^{÷} = ø>0 \Leftrightarrow 5ø^2-3ø-2=0 \Leftrightarrow$$

$$ψ_1=1 \text{ ή } ψ_2=-\frac{2}{5} \text{ (απορ.)} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x} = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{0} \Leftrightarrow χ=0.$$

β)Καταρχήν η (1) ορίζεται στο R. Επειδή το 9 είναι δύναμη του 3 προσπαθούμε να δημιουργήσουμε δυνάμεις με βάση το 3.

Αναλυτικά : (β)$\Leftrightarrow (3^2)^{x+1}-27.3^{x}=0 \Leftrightarrow 3^{2(x+1)}=3^3.3^{x} \Leftrightarrow 3^{2(x+1)}=3^{3+x} \Leftrightarrow 2(χ+1)=3+χ \Leftrightarrow χ=1$ .

**Παράδειγμα 4**

Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $7^{x^2-2x+1}=5^{(x-1)^2}$ (1) ,β) $\frac{1}{4}\sqrt{2^{x}}=8.2^{x}$ (2) .

***Λύση***

α) Καταρχήν η (1) ορίζεται στο R . Παρατηρώντας την όμως βλέπουμε ότι έχουμε ισότητα δυνάμεων με βάσεις πρώτους αριθμούς τότε μια προφανής λύση της εξίσωσης δίνεται στην περίπτωση όπου και οι δυο εκθέτες θα είναι ταυτόχρονα μηδέν ,δηλαδή όταν έχω :

$(1) \Leftrightarrow \chi^2-2\chi+1=0$ και $(\chi-1)^2=0 \Leftrightarrow (\chi-1)^2=0$ και $(\chi-1)^2=0 \Leftrightarrow \chi-1=0 \Leftrightarrow \chi=1$ .
Η άλλη λύση της εξίσωσης προκύπτει λογαριθμίζοντας την εξίσωση.

β)Έχουμε : $(2) \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(2^x\right)^{1/2} = 8.2^x$ (θέτω $2^x = \psi > 0$ )

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\psi^{1/2} = 8\psi$ (υψώνω στο τετράγωνο αφού $8\psi>0$)

$\Leftrightarrow \psi^{1/2} = 32\psi$

$\Leftrightarrow (\psi^{1/2})^2 = (32\psi)^2 \Leftrightarrow \psi=1024\psi^2 \Leftrightarrow 1024\psi^2-\psi=0 \Leftrightarrow \psi=0$ ή $\psi=1024$

$\Leftrightarrow 2^x=1024=2^{10} \Leftrightarrow \chi=10$.

**Παράδειγμα 5**

Να λυθεί η εξίσωση : $(x^2-x+2)^{\eta\mu x} = \sqrt{x^2-x+2}$ (1).

***Λύση***

Καταρχήν η εξίσωση πρέπει να έχει : $\chi^2-\chi+2 > 0$ ,που ισχύει για κάθε $\chi \in R$ αφού $\Delta<0$ Έχουμε λοιπόν :
$(1) \Leftrightarrow (\chi^2-\chi+2)^{\eta\mu\chi}=(\chi^2-\chi+2)^{1/2}$ (2) .
Η σχέση (2) είναι μια ισότητα δυνάμεων που ισχύει όταν : $\alpha^\kappa = \alpha^\lambda \Leftrightarrow \kappa=\lambda$ ή $\alpha=1$ ,οπότε από (2) έχουμε :

$\eta\mu\chi=\frac{1}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{6}$ ή $\chi^2-\chi+2=1$ $(\Delta<0) \Leftrightarrow \chi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$ ή $\chi=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}$ .

**Παράδειγμα 6**

Να λυθούν οι ανισώσεις : $\alpha)\ 2^{x^2-2x}<8^{x-2}$ , $\beta)\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} > \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$

***Λύση***

α) $2^{x^2-2x}<8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x}<2^{3(x-2)} \Leftrightarrow x^2-2x<3(x-2) \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow x^2-5x+6<0 \Leftrightarrow 2<x<3$ .

β) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} > \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-(7x-3)} \Leftrightarrow 3x-7 < -(7x-3) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 10x<10 \Leftrightarrow x<1$.

**Παράδειγμα 7**

Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις : α)$2^x + 2^{1-x} < 3$ , β)$(\chi^2-\chi+2)^x > \left(\sqrt{x^2-x+2}\right)^{8/x}$

***Λύση***

α)Έχουμε : $2^x+2^{1-x} <3 \Leftrightarrow 2^x+\frac{2^1}{2^{\div}} <3$ (Θέτω $2^x=\psi >0$ ) $\Leftrightarrow \psi+\frac{2}{\o} <3$ (πολλαπλασιάζω με $\psi>0$ )

$\Leftrightarrow \psi^2 +2 < 3\psi \Leftrightarrow \psi^2-3\psi+2<0$ ($\Delta=1$ με $\psi_1=1$ ή $\psi_2=2$) $\Leftrightarrow 1< \psi <2 \Leftrightarrow 2^0 < 2^x <2^1 \Leftrightarrow 0<\chi<1$.
β)Καταρχήν η εξίσωση πρέπει να'χει : $\chi^2-\chi+2 > 0$ , ισχύει για κάθε $\chi \in R$ αφού $\Delta <0$

Η αρχική ανίσωση γράφεται :$(\chi^2-\chi+2)^x > (\chi^2-\chi+2)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x}} \Leftrightarrow (\chi^2-\chi+2)^x > (\chi^2-\chi+2)^{\frac{4}{x}}$ (1)

i)Εάν για την (1) έχουμε :$\chi^2-\chi+2>1 \Leftrightarrow \chi^2-\chi+1>0 \Leftrightarrow$ισχύει για κάθε $\chi \in R$ τότε:

$x > \frac{4}{x} \Leftrightarrow x-\frac{4}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} > 0 \Leftrightarrow \chi(\chi^2-4)>0 \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow -2<\chi<0$ ή $\chi>2$.

ii)Εάν για την (1) έχουμε $0<\chi^2-\chi+2<1 \Leftrightarrow$ αδύνατη .

**Παράδειγμα 8**

–

Να λυθούν τα συστήματα : α) $\begin{cases} 2\cdot 2^{2x+y}=8^{-1}\cdot 4^{x-y} \\ 3^{2x+1}=81\cdot 3^{4y-2} \end{cases}$ ,β) $\begin{cases} 3^{x+1}-2^{y}=8 \\ 3^{x-1}+2^{y+1}=3 \end{cases}$ ,γ) $\begin{cases} 3^{x}\cdot 2^{y}=36 \\ 4^{x}\cdot 3^{y}=48 \end{cases}$.

***Λύση***

α) $\begin{cases} 2\cdot 2^{2x+y}=8^{-1}\cdot 4^{x-y} \\ 3^{2x+1}=81\cdot 3^{4y-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{1+2x+y}=2^{-3}\cdot 2^{2(x-y)} \\ 3^{2x+1}=3^{4}\cdot 3^{4y-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{1+2x+y}=2^{-3+2(x-y)} \\ 3^{2x+1}=3^{4+4y-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2x+y=-3+2(x-y) \\ 2x+1=2+4y \end{cases} \Leftrightarrow .. \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{13}{6} \\ y=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

β)Το αρχικό σύστημα γράφεται ισοδύναμα : $\begin{cases} 3^{x}\cdot 3-2^{y}=8 \\ 3^{x}\cdot 3^{-1}+2\cdot 2^{y}=3 \end{cases}$.

Θέτοντας όμως $3^x=\omega>0$ και $2^y=\varphi>0$ έχουμε πλέον το εξής σύστημα :

$\begin{cases} 3\omega-\varphi=8 \\ \dfrac{\omega}{3}+2\varphi=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi=3\omega-8 \\ \omega+6\varphi=9 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi=1 \\ \omega=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{y}=2^{0} \\ 3^{x}=3^{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$.

γ)Διαιρούμε κατά μέλη τις δυο εξισώσεις του συστήματος και έχουμε :

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{y}=\dfrac{36}{48} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-y}=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-y}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1} \Leftrightarrow x-y=1 \Leftrightarrow x=y+1$.

Η πρώτη εξίσωση αρα γράφεται : $3^{y+1}\cdot 4^{y}=36 \Leftrightarrow 3^{y}\cdot 3\cdot 4^{y}=36 \Leftrightarrow (3.4)^{y}=12 \Leftrightarrow 12^{y}=12^{1} \Leftrightarrow y=1$.

Τελικά η λύση τους συστήματος είναι (x,y)=(2,1).

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄΄**

**1.** Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{X}$.

Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

**i.** Η f έχει πεδίο ορισμού το R **Σ Λ**

**ii.** Η f έχει σύνολο τιμών το R **Σ Λ**

**iii.** Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R **Σ Λ**

**iv.** Η f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y **Σ Λ**

**v.** Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των x **Σ Λ**

**vi.** Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική με άξονα συμμετρίας τον y΄y προς τη γραφική παράσταση της g (χ) = $5^{x}$. **Σ Λ**

**vii.** Ισχύει ότι f (2) > f (1/5) **Σ Λ**

**viii.** Ιςχύει ότι f ($2^{1999}$) > f ($2^{2000}$) **Σ Λ**

**ix.** Το σημείο Α (0, 1) ανήκει στην γραφική παράσταση της f **Σ Λ**

**x.** Το σημείο $\mathrm{M}\left(\sqrt[5]{2},-5^{-2}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f. **Σ Λ**

**2.** Ισχύει ότι:

**i.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}<2^{x}$, για κάθε $x\in R$ **Σ Λ**

**ii.** $\left(\sqrt{3}\right)^{x}\neq\left(\sqrt{5}\right)^{x}$, για κάθε $x\in R$ **Σ Λ**

# Ο ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ

**Ορισμός**
Λογάριθμο ενός αριθμού θ>0 με βάση το α όπου $0<\alpha\neq 1$ , θα θεωρούμε τη μοναδική λύση της εξίσωσης $\alpha^x=\theta$.Την λύση αυτή θα την ονομάζουμε λογάριθμο του θ με βάση α και θα συμβολίζεται με $\log_\alpha \theta$ .

Δηλαδή ισχύει :$\boldsymbol{\alpha^x=\theta \Leftrightarrow x=\log_\alpha\theta}$.

**Σχόλιο**
Από τον ορισμό του λογάριθμου προκύπτουν κάποιες άμεσες ιδιότητες:

**1.** $\log_\alpha \alpha^x = x$ **2.** $\alpha^{\log_\alpha\theta} = \theta$ **3.** $\log_\alpha 1=0$ **4.** $\log_\alpha \alpha=1$ .

**Ιδιότητες**
Εάν $0<\alpha\neq 1$ η βάση των λογάριθμων ,$\kappa\in R$ και $\theta_1,\theta_2,\theta>0$ τότε αποδεικνύεται ότι:

**1.** Λογάριθμος γινόμενου : $\log_\alpha(\theta_1.\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$

**2.** Λογάριθμος πηλίκου : $\log_\alpha(\theta_1 : \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$

**3.** Λογάριθμος δυνάμεως : $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa.\log_\alpha\theta$ (συνέπεια $\log_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \frac{1}{\nu}\log_\alpha \theta$ )

**4.** Αλλαγή βάσης λογαρίθμου : $\log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\beta}$ με $0 < \alpha,\beta \neq 1$ .

**Παρατηρήσεις**

1. Για να μην κάνουμε λάθος όταν $x\psi>0$ ή $\frac{x}{y} > 0$ ή $x^\kappa>0$ και δεν ξέρουμε το πρόσημο των $x,y$

γράφουμε τότε: α)$\log(x.y)=\log|x| +\log|y|$ ,β)$\log\frac{x}{y} = \log|x| -\log|y|$ ,γ)$\log x^\kappa=\kappa.\log|x|$

2. Ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες των λογάριθμων ,που όταν χρησιμοποιούνται θα πρέπει να αποδεικνύονται όμως, είναι :

**i.** $\log_\alpha \beta.\log_\beta\alpha = 1 \Leftrightarrow \log_\alpha \beta = \frac{1}{\log_\beta \alpha}$ **ii.** $x^{\log y} = y^{\log x}$ , **3.** $\log_{\alpha^\kappa} \beta = \frac{1}{\kappa}\log_\alpha \beta$ .

**Ορισμός**
Δεκαδικός λογάριθμος ενός αριθμού θ>0 θα ονομάζεται ο λογάριθμος του θ με βάση το 10 και συμβολίζεται με logθ αντί να γράφουμε $\log_{10}\theta$ άρα $\boldsymbol{10^x=\theta \Leftrightarrow x=\log\theta}$.

**Ορισμός**
Φυσικός ή νεπέρειος λογάριθμος ενός αριθμού θ>0 θα ονομάζεται ο λογάριθμος του θ με βάση τον αριθμό e=2,71..συμβολίζεται δε με lnθ αντί $\log_e\theta$ άρα $\boldsymbol{e^x=\theta \Leftrightarrow x=\ln\theta}$.

# ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

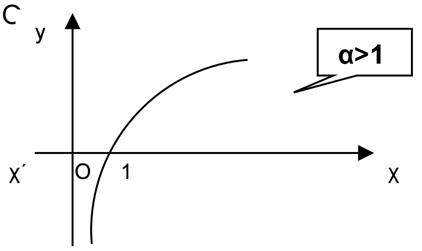
## Ορισμός

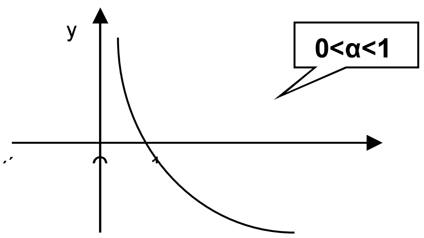
Έστω η εκθετική συνάρτηση $g(\chi)=\alpha^{\chi}$ , $0<\alpha\neq 1$ με $g:R\rightarrow R_+^*$ τότε η αντίστροφη της g έστω f με $f: R_+^* \rightarrow R$ , θα καλείται λογαριθμική συνάρτηση με βάση α και τύπο $f(\chi)=\log_\alpha \chi$ με $0<\alpha\neq 1$ και $\chi\in R_+^*$ .

## Μελέτη της συνάρτησης $f(\chi)=\log_\alpha\chi$ με $0<\alpha\neq 1$

i.Πεδίο ορισμού της είναι το $(0, +\infty)$
ii.Σύνολο τιμών της είναι το R .
iii. Μονοτονία :

- Αν **α>1** τότε είναι γνησίως αύξουσα στο $R_+^*$ δηλ. για κάθε $\chi_1,\chi_2\in R_+^*$ ισχύει αν $\chi_1<\chi_2$ τότε $\log_\alpha\chi_1<\log_\alpha\chi_2$.Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα χχ' στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Οy'
- Αν **0<α<1** τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $R_+^*$ δηλ. για κάθε $\chi_1,\chi_2\in R_+^*$ ισχύει αν $\chi_1<\chi_2$ τότε $\log_\alpha\chi_1<\log_\alpha\chi_2$.Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα χχ' στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα C




## Παρατηρήσεις

**1.**Για την λογαριθμική συνάρτηση προφανώς θα ισχύουν όλες οι ιδιότητες των λογαρίθμων.
**2.**Η λογαριθμική συνάρτηση έχει την ιδιότητα: $\boldsymbol{\log\chi_1=\log\chi_2 \Leftrightarrow \chi_1=\chi_2}$. Στην ιδιότητα αυτή βασίζεται και η λύση των λογαριθμικών εξισώσεων.
**3.**Όταν μας ζητούν το πεδίο ορισμού μιας λογαριθμικής της μορφής $f(\chi) = \log_{\varphi(\chi)}g(\chi)$ θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα : $g(\chi) > 0$ και $0<\varphi(\chi)\neq 1$ .
**4.**Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος εμφανίζεται στο λογάριθμο θα ονομάζονται λογαριθμικές εξισώσεις. Για τις ασκήσεις που αφορούν την λύση λογαριθμικών εξισώσεων θα πρέπει να κάνουμε τα εξής :
Πάντα ξεκινάμε με την ανεύρεση των $\chi\in R$ για τα οποία έχει νόημα η εξίσωση.

- Αν έχουμε $\log_\alpha f(\chi)=\beta$ λύνουμε την εξίσωση $f(\chi)=\alpha^\beta$ ,
- Αν έχουμε $\log_\alpha f(\chi)=g(\chi)$ λύνουμε την εξίσωση $\alpha^{g(\chi)} = f(\chi)$ ,
- Αν έχουμε $\log_{g(\chi)}f(\chi)=\varphi(\chi)$ λύνουμε την εξίσωση $g(\chi)^{\varphi(\chi)} = f(\chi)$ ,
- Αν έχουμε $\log_\alpha f(\chi)=\log_\alpha g(\chi)$ λύνουμε την εξίσωση $f(\chi) = g(\chi)$ ,
-

*ΠΡΟΣΟΧΗ !!!!* αν σε μια λογαριθμική εξίσωση οι λογάριθμοι έχουν διαφορετική βάση θα πρέπει να μετατρέπονται όλοι σε λογάριθμους με την ίδια βάση .

**5.**Η λύση των λογαριθμικών ανισώσεων βασίζεται στην μελέτη της μονοτονίας των λογαριθμικών συναρτήσεων. Για τις ασκήσεις που αφορούν την λύση λογαριθμικών ανισώσεων θα πρέπει πάντα να ξεκινάμε με την ανεύρεση των $\chi\in R$ για τα οποία έχει νόημα η ανίσωση να λύνουμε και τέλος θα πρέπει να συναληθεύουμε την λύση που θα βρίσκουμε με το σύνολο ορισμού της ανίσωσης.

Αν έχουμε $\log_\alpha f(\chi) < \log_\alpha g(\chi) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\chi) < g(\chi) & \text{αν} \quad \alpha > 1 \\ f(\chi) > g(\chi) & \text{αν} \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$ .

Αν έχουμε $\log_\alpha f(\chi) < 1 = \log_\alpha \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} f(\chi) < \alpha & \text{αν} \quad \alpha > 1 \\ f(\chi) > \alpha & \text{αν} \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$ .

Αν έχουμε $\log_\alpha f(\chi) < 0 = \log_\alpha 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\chi) < 1 & \text{αν} \quad \alpha > 1 \\ f(\chi) > 1 & \text{αν} \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$ .

**7.**Τα λογαριθμικά συστήματα δεν έχουν συγκεκριμένο τρόπο λύσης.Συνήθως θα γίνεται μια προσπάθεια η οποία έγκειται στην μετατροπή των εξισώσεων του συστήματος είτε με τον ορισμό είτε με τις ιδιότητες των λογάριθμων σε μια πιο απλή μορφή.

## ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

**Παράδειγμα 1**
Σε μια γεωμετρική πρόοδο ($α_ν$) με θετικούς όρους έχουμε $α_λ=α$ ,$α_μ=β$ και $α_κ=γ$. Να αποδείξετε τοτε ότι : (μ-κ)logα+(κ-λ)logβ+(λ-μ)logγ = 0.

***Λύση***
Εάν $α_1$ ο πρώτος όρος της προόδου και ω ο λόγος της γ.π. τότε :
$α^λ=α \Leftrightarrow α_1.ω^{λ-1}=α$ (1) ,$α_μ=β \Leftrightarrow α_1.ω^{μ-1}=β$ (2) ,$α_κ=γ \Leftrightarrow α_1.ω^{κ-1}=γ$ (3)
Οπότε θα έχουμε : $(μ-κ)\log(α_1.ω^{λ-1}) + (κ-λ)\log(α_1.ω^{μ-1}) + (λ-μ)\log(α_1.ω^{κ-1}) =$
$(μ-κ)(\log α_1+\log ω^{λ-1}) + (κ-λ)(\log α_1+\log ω^{μ-1}) + (λ-μ)(\log α_1+\log ω^{κ-1}) =$
$(μ-κ)[\log α_1+(λ-1)\log ω] + (κ-λ)[\log α_1+(μ-1)\log ω] + (λ-μ)[\log α_1+(κ-1)\log ω]=$
$(μ-κ+κ-λ+λ-μ)\log α_1 + [(μ-κ)(λ-1)+(κ-λ)(μ-1)+(λ-μ)(κ-1)]\log ω =0.\log α_1+ 0.\log ω = 0$ .

**Παράδειγμα 2**
α)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με $f(x)=\log\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$ .
β) Αποδείξτε επίσης ότι η συνάρτηση είναι "1-1" ,
γ) Τέλος να δείξετε ότι είναι μια περιττή συνάρτηση.

***Λύση***
α)Για να ορίζεται η f πρέπει $\left(\frac{3-x}{3+x}\right)>0 \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow -3<x<3$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα Α=(-3,3).
β)Εάν $x_1,x_2\in A$ τότε έχουμε :
$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\log\left(\frac{3-x_1}{3+x_1}\right)=\log\left(\frac{3-x_2}{3+x_2}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{3-x_1}{3+x_1}\right)=\left(\frac{3-x_2}{3+x_2}\right)\Leftrightarrow \overset{\text{πραξεις}}{\ldots\ldots\ldots} \Leftrightarrow x_1=x_2$$
Άρα η f είναι "1-1".
γ)Για κάθε $x\in A$ έχω και $-x\in A$ :
$$f(-x)=\log\left(\frac{3-(-x)}{3+(-x)}\right)=\log\left(\frac{3+x}{3-x}\right)=\log\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1}=-\log\left(\frac{3-x}{3+x}\right)=-f(x)$$
Οπότε η συνάρτηση είναι περιττή.

**Παράδειγμα 3**
Να λυθούν οι εξισώσεις : α)$\log_5(3χ+2)-\log_5(χ+1)=\log_5 2$ , β)log(χ-1)+log(χ+2)=2(1-log5) .

***Λύση***
α)Πρέπει καταρχήν 3χ+2>0 και χ+1>0 $\Leftrightarrow χ>-\frac{2}{3}$ .
Η αρχική εξίσωση γράφεται : $\log_5\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)=\log_5 2\Leftrightarrow\frac{3x+2}{x+1}=2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=0$ (δεκτή).
β)Πρέπει χ-1>0 και χ+2>0 $\Leftrightarrow$ χ>1 . Η αρχική εξίσωση τώρα γίνεται :
$\log[(χ-1)(χ+2)]=2(\log 10-\log 5)\Leftrightarrow\log(χ^2+χ-2)=2\log(\frac{10}{5})=2\log 2=\log 2^2=\log 4\Leftrightarrow χ^2+χ-2=4\Leftrightarrow$
χ=2 (δεκτή) ή χ=-3 (απορ.)

**Παράδειγμα 4**
Να λυθούν οι εξισώσεις : α)$\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$ , β)$x\log 5-\log(1+2^x)=x-\log 6$ .

***Λύση***
α)Οι αριθμοί καταρχήν $9^{x-1}+7$ και $3^{x-1}+1$ είναι θετικοί για κάθε $x\in R$. Η εξίσωση γράφεται:
$\log_2[3^{2(x-1)}+7] = \log_2 2^2 + \log_2(3^{x-1}+1) \Leftrightarrow \log_2[3^{2(x-1)}+7] = \log_2[4.(3^{x-1}+1)] \Leftrightarrow 3^{2x-2}+7 =4.3^{x-1}+4 \Leftrightarrow$
$3^{2x}.3^{-2}+7=4.3^x.3^{-1}+4$ (1) . Θέτοντας στην (1) όπου $3^x=y>0$ έχουμε ισοδύναμα την εξίσωση:

$\frac{y^2}{9}+7=\frac{4y}{3}+4 \Leftrightarrow y^2-12y+36=0 \Leftrightarrow y=3$ ή $y=9 \Leftrightarrow 3^x=3=3^1$ ή $3^x=9=3^2 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$

β)Καταρχήν η εξίσωση έχει νόημα για κάθε $x \in R$. Η εξίσωση γράφεται λοιπόν :

$$\log 5^x-\log(1+2^x)=\log 10^x-\log 6 \Leftrightarrow \log\left(\frac{5^x}{1+2^x}\right)=\log\left(\frac{10^x}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{5^x}{1+2^x}=\frac{10^x}{6} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 6.5^x=10^x(1+2^x) \Leftrightarrow$ ..äéáéñþ ìå ôï $5^{÷}$.. $\Leftrightarrow 6=2^x(1+2^x)$ (1) .

Θέτοντας στην (1) όπου $2^x=\psi>0$ έχουμε: $6=\psi(1+\psi) \Leftrightarrow \psi=2$ δηλαδή $\chi=1$.

**Παράδειγμα 6**

Να λυθούν οι ανισώσεις :α) $\log_{\frac{1}{5}}(3^x+2)<2x\log_{\frac{1}{5}}3$ ,β) $x^{\ln x}>e$ .

***Λύση***

α)Καταρχήν η ανίσωση έχει νόημα για κάθε $x \in R$ και γράφεται ισοδύναμα :

$\log_{\frac{1}{5}}(3^x+2)<\log_{\frac{1}{5}}3^{2x} \Leftrightarrow 3^x+2<3^{2x}$ ,αφού $0<\frac{1}{5}<1$.

Θέτοντας όμως $3^x=\psi>0$ ,έχουμε : $\psi+2>\psi^2 \Leftrightarrow \psi^2-\psi-2<0 \Leftrightarrow -1<\psi<2$.

Αλλά $\psi>0$ άρα :$0<\psi<2 \Leftrightarrow 0<3^x<2 \Leftrightarrow 3^x<3^{\log_3 2} \Leftrightarrow x<\log_3 2$

β)Θα πρέπει καταρχήν να είναι $\chi>0$.Η ανίσωση τότε γράφεται λογαριθμίζοντας και τα δυο μέλη της :

$\ln(x^{\ln x})>\ln e \Leftrightarrow \ln x.\ln x>1 \Leftrightarrow \ln^2 x-1>0 \Leftrightarrow \ln^2 x>1 \Leftrightarrow |\ln x|>1 \Leftrightarrow \ln x<-1$ ή $\ln x>1 \Leftrightarrow \ln x<\ln e^{-1}$ ή $\ln x>\ln e$

$\Leftrightarrow 0<x<e^{-1}$ ή $x>e$ .

**Παράδειγμα 7**

Να λυθούν οι ανισώσεις : α) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x+1}>\left(\frac{25}{4}\right)^{2-\log x^3}$ ,β) $\log_{x-3}(x^2+6x+9)+\log_{3+x}(x^2-6x+9)>4$ .

***Λύση***

α)Πρέπει $x>0$. Έχουμε τότε :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x+1}>\left(\frac{5^2}{2^2}\right)^{2-\log x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x+1}>\left(\frac{5}{2}\right)^{2(2-\log x^3)} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x+1}>\left(\frac{2}{5}\right)^{-2(2-\log x^3)}.$$

Επειδή όμως $0<\frac{2}{5}<1$, έχουμε :

$\log^2 x+1<-4+2\log x^3 \Leftrightarrow \log^2 x-2\log x^3+5<0 \log^2 x-6\log x+5<0 \Leftrightarrow 1<\log x<5 \Leftrightarrow \log 10<\log x<\log 10^5 \Leftrightarrow 10<x<10^5$ .

β)Πρέπει $3-\chi>0$ και $3-\chi\neq 0$ και $3+\chi>0$ και $3+\chi\neq 0 \Leftrightarrow \chi \in (-3,-2)\cup(-2,2)\cup(2,3)$ (1). Τότε :

$$\log_{x-3}(x+3)^2+\log_{3+x}(x-3)^2>4 \Leftrightarrow 2\log_{x-3}(x+3)+2\log_{3+x}(x-3)>4 \Leftrightarrow$$

$$2\frac{\log(x+3)}{\log(x-3)}+2\frac{\log(x-3)}{\log(x+3)}>4 \Leftrightarrow \frac{\log(x+3)}{\log(x-3)}+\frac{\log(x-3)}{\log(x+3)}>2 \Leftrightarrow \frac{\log^2(x+3)+\log^2(x+3)-2\log(x-3)(x+3)}{\log(x-3)\log(x+3)}>0$$

$$\frac{(\log(x-3)-\log(x+3))^2}{\log(x-3)\log(x+3)}>0 \Leftrightarrow \log(x-3)\log(x+3)>0$$

$$\begin{cases}\log(x-3)>0=\log 1 \ \text{êáé} \ \log(x+3)>0=\log 1\\ \log(x-3)<0=\log 1 \ \text{êáé} \ \log(x+3)<0=\log 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3>1 \ \text{êáé} \ x+3>1\\ x-3<1 \ \text{êáé} \ x+3<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>4\\ x<-2\end{cases} \ (2)$$

Από (1),(2) έχω : $x \in (-3,-2)$.