

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Δυνάμεις με βάση πραγματικό και εκθέτη ρητό αριθμό.

$$1. a^v = \begin{cases} 1 & , \text{εαν } v = 0 \\ a & , \text{εαν } v = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{v\text{-φορές}} & , \text{εαν } v \geq 2 \end{cases} \quad , a \in \mathbb{R} \text{ και } v \in \mathbb{N}$$

$$2. a^{-v} = \frac{1}{a^v} \quad \text{ή} \quad a^v = \frac{1}{a^{-v}} \quad , a \in \mathbb{R}^* \text{ και } v \in \mathbb{N}^*$$

$$3. \left(\frac{a}{b} \right)^{-v} = \left(\frac{b}{a} \right)^v \quad a, b \in \mathbb{R}^* \text{ και } v \in \mathbb{N}^*$$

$$4. \underline{a^{\frac{\mu}{v}}} = \sqrt[v]{a^\mu} \quad a > 0, \mu, v \in \mathbb{Z} \text{ και } v \neq 0$$

π.χ. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

σ.χ. $\left(\frac{1}{3} \right)^{-2} = \left(\frac{3}{1} \right)^2 = \frac{3^2}{1^2} = \frac{9}{1}$

η.χ. $\sqrt[2]{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$

Στις δυνάμεις με βάση και εκθέτη πραγματικό αριθμό ισχύουν οι ιδιότητες :

$$1. a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{π.χ.} \quad 2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

$$2. a^x : a^y = a^{x-y} \quad \text{π.χ.} \quad 2^4 : 2^2 = \frac{2^4}{2^2} = 2^{4-2} = 2^2 = 4$$

$$5. (a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad \text{π.χ.} \quad (2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$$

$$3. (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \quad \text{π.χ.} \quad (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$$

$$\text{π.χ.}^2 \quad 3^3 \cdot 2^3 = (3 \cdot 2)^3 = 6^3$$

$$4. (a : b)^x = a^x : b^x \quad \text{π.χ.} \quad (7 : 2)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7^2}{2^2}$$

$$6. a^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad (a \neq 1) \quad \text{π.χ.} \quad 3^x = \underline{1} \Leftrightarrow 3^x = \underline{3^0} \Leftrightarrow x = 0$$

$$7. a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

$$a) \quad 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$b) \quad 2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$$

$$c) \quad 2^x = \frac{1}{64} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2^6} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-6} \Leftrightarrow x = -6$$

$$d) \quad 3^{2x+1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x+1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$e) \quad 2023^{x^2-3x+2} = 1 \Leftrightarrow 2023^{x^2-3x+2} = 2023^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = 1$$

$$6c) \quad ii) \quad 9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow (3^2)^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$\text{Substitue } y = 3^x > 0 \quad y^2 - 8y - 9 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -8$$

$$c = -9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 64 + 36 = 100$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 10}{2} = 4 \pm 5 = \begin{matrix} 9 \\ -1 \end{matrix}$$

und

$$y = 9$$

oder

$$y = -1$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = -1$$

$$3^x = 3^2$$

Ablesen

$$x = 2$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$

iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^{-2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

iv) $3^{-x} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^{-x} = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^{-x} = 3^{-4} \Leftrightarrow -x = -4 \Leftrightarrow x = 4$

v) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{64}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{4^3}{3^3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \Leftrightarrow x = -3$

vi) $27^{4x} = 9^{x+1} \Leftrightarrow (3^3)^{4x} = (3^2)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{12x} = 3^{2(x+1)} \Leftrightarrow 3^{12x} = 3^{2x+2}$

$$\Leftrightarrow 12x = 2x + 2 \Leftrightarrow 10x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{10} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

vii) $32^x = 16^{1-x} \Leftrightarrow (2^5)^x = (2^4)^{1-x} \Leftrightarrow 2^{5x} = 2^{4(1-x)} \Leftrightarrow 5x = 4(1-x)$

$$\Leftrightarrow 5x = 4 - 4x \Leftrightarrow 5x + 4x = 4 \Leftrightarrow 9x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$$

viii) $3^{x^2-x-2} = 3^0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

γιατί: $a = 1$ $b = -1$ $\gamma = -2$ $\Delta = b^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$$

1. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση: $f(x) = \left(\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}\right)^x$. Για ποιες από αυτές τις τιμές η συνάρτηση είναι:

i) γνησίως φθίνουσα

ii) γνησίως αύξουσα

μία συνάρτηση $f(x) = a^x$ (όπου a η κάθε βάση)

* Για να ορίζεται στο $\mathbb{R}$: $a > 0$

* Για να είναι εκθετική : $0 < a \neq 1$

* Για να είναι αύξουσα : $a > 1$

* Για να είναι φθίνουσα : $0 < a < 1$

Συνεπώς, ώστε να ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση, η βάση είναι $\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}$

Εκθετικές εξισώσεις

1η Κατηγορία $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & 7^{2x-5} - 7^{4-x} = 0 \\ & 7^{2x-5} = 7^{4-x} \\ \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \quad & 2x-5 = 4-x \\ & 2x+x = 4+5 \\ & 3x = 9 \\ & \underline{x = 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad & 8^{x^2-x} = 4^{x^2+2} \\ & (2^3)^{x^2-x} = (2^2)^{x^2+2} \\ & 2^{3(x^2-x)} = 2^{2(x^2+2)} \\ \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \quad & 3x^2 - 3x = 2x^2 + 4 \\ & x^2 - 3x - 4 = 0 \\ & x = 4 \quad \vee \quad x = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad & 3^{8-|x|} = 9^{1x-2} \\ & 3^{8-|x|} = (3^2)^{1x-2} \\ & 3^{8-|x|} = 3^{2(1x-2)} \\ \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \quad & 8-|x| = 2|x|-4 \\ & -|x| - 2|x| = -8-4 \\ & -3|x| = -12 \\ & |x| = 4 \\ & x = 4 \quad \vee \quad x = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \quad & \left(\frac{1}{4}\right)^{x+5} = \sqrt[2]{2}^{x-4} \\ & \left(\frac{1}{2^2}\right)^{x+5} = (2^{\frac{1}{2}})^{x-4} \\ & (2^{-2})^{x+5} = 2^{\frac{1}{2}(x-4)} \\ & 2^{-2x-10} = 2^{\frac{x}{2}-2} \\ \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \quad & -2x-10 = \frac{x}{2}-2 \\ & -4x-20 = x-4 \\ & -5x = 16 \\ & x = -\frac{16}{5} \end{aligned}$$

2η Κατηγορία $f(a^x) = 0$

πρέπει να γίνουν με πρώτα
ή να 2κθετίων (αν γίνεται)

α) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$
 $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$
 $4 \cdot (2^2)^x - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$
 $4 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$
 $4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$
 Θέτω $y = 2^x$
 $4y^2 - 9y + 2 = 0$

ή
 $y = 2 \quad \vee \quad y = \frac{1}{4}$
 $2^x = 2 \quad \vee \quad 2^x = \frac{1}{4}$
 $2^x = 2^1 \quad \vee \quad 2^x = 2^{-2}$
 $x = 1$ $x = -2$

β) $3^x - 7 = \frac{63}{3^{x+1}} - 3^{3-2x}$ $\Leftrightarrow 3^x - 7 = \frac{63}{3 \cdot 3^x} - \frac{3^3}{3^{2x}}$
 $\Leftrightarrow 3^x - 7 = \frac{21}{3^x} - \frac{27}{(3^x)^2}$ $\Theta \acute{\epsilon} \tau \omega \quad y = 3^x$
 $\Leftrightarrow y - 7 = \frac{21}{y} - \frac{27}{y^2}$ $\Leftrightarrow y^3 - 7y^2 = 21y - 27$
 $\Leftrightarrow y^3 - 7y^2 - 21y + 27 = 0$
 $\Leftrightarrow y = 1 \quad \vee \quad y = 9 \quad \vee \quad y = -3$
 $3^x = 1 \quad \vee \quad 3^x = 3^2 \quad \vee \quad 3^x = -3$
 $x = 0 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad \text{Αδύνατο}$

3η Κατηγορία (2 εκθετικές)

$$a) \quad 9^{x+1} - 4^{x+2} = 44 \cdot 4^{x-1} + 3^{2x}$$

$$(3^2)^{x+1} - (2^2)^{x+2} = 44 \cdot (2^2)^{x-1} + 3^{2x}$$

$$3^{2x+2} - 2^{2x+4} = 44 \cdot 2^{2x-2} + 3^{2x}$$

$$3^2 \cdot \underline{3^{2x}} - \underline{2^4} \cdot 2^{2x} = 44 \cdot \underline{2^{2x-2}} + \underline{3^{2x}}$$

$$9 \cdot 3^{2x} - 3^{2x} = 11 \cdot 2^{2x-2} + 16 \cdot 2^{2x}$$

$$8 \cdot 3^{2x} = 27 \cdot 2^{2x}$$

$$\frac{3^{2x}}{2^{2x}} = \frac{27}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\stackrel{!-1}{\Leftrightarrow} 2x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$b) \quad 4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0$$

$$(2^2)^{x+1} - 13 \cdot (2 \cdot 3)^x + (3^2)^{x+1} = 0$$

$$2^{2x+2} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x+2} = 0$$

$$2^2 \cdot 2^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^2 \cdot 3^{2x} = 0$$

$$\stackrel{\cdot 3^{2x}}{\Leftrightarrow} \quad 4 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - 13 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + 9 \cdot \frac{3^{2x}}{3^{2x}} = 0$$

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \frac{2^x}{3^x} + 9 = 0$$

$$4 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x \right]^2 - 13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 9 = 0$$

$$\text{Bis zu } y = \left(\frac{2}{3}\right)^x : 4y^2 - 13y + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 1 \quad \vee \quad y = \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

$$x = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$x = -2$$

4η Κατηγορία $(f(x))^{g(x)} = 1$

* για να ισχύει πρέπει

$f(x)=1$ ή

$g(x)=0$ και $f(x) \neq 0$ ή

$f(x)=-1$ και $g(x)$ άρτιος

α) $(x^2 - 3x + 1)^{3x-5} = 1$

Για να ισχύει

• $x^2 - 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0$

$\underline{x=0} \quad \vee \quad \underline{x=3}$

• $\frac{5}{3x-5} = 0$ και $x^2 - 3x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ και $x = \frac{5}{3}$

$\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \cancel{3} \cdot \frac{5}{3} + 1 = \frac{25}{9} - 5 + 1 = -\frac{11}{9} \neq 0$

και $x = \frac{5}{3}$

• $\frac{5}{x^2 - 3x + 1} = -1$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = 1 \quad \vee \quad x = 2$

και $3x - 5$ άρτιος

• για $x = 1 : 3 \cdot 1 - 5 = 3 - 5 = -2$ ✓ άρτιος

• για $x = 2 : 3 \cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1$ ✗ περιττός

και $\underline{x = 2}$

Άρα οι λύσεις είναι $x = 0 \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad x = \frac{5}{3} \quad \vee \quad x = 2$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $4^{x-1} - 5\sqrt{4^{x-2}} + 1 = 0$

$$i) \frac{4^x}{4} - 5\sqrt{\frac{4^x}{4^2}} + 1 = 0$$

$$\frac{4^x}{4} - 5\sqrt{\frac{4^x}{4}} + 1 = 0$$

$$\stackrel{4}{\Rightarrow} 4^x - 5\sqrt{4^x} + 4 = 0$$

$$4^x - 5 \cdot 4^{\frac{x}{2}} + 4 = 0$$

$$(4^{\frac{x}{2}})^2 - 5(2^{\frac{x}{2}})^2 + 4 = 0$$

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^{\frac{2x}{2}} + 4 = 0$$

$$(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$\text{Θέτω } y = 2^x$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$y = 4 \quad \wedge \quad y = 1$$

$$2^x = 4 \quad \wedge \quad 2^x = 1$$

$$2^x = 2^2 \quad \wedge \quad 2^x = 2^0$$

$$\underline{x = 2}$$

$$\underline{x = 0}$$

ii) $3^x + 3^{x-1} = \frac{45}{3^{x+2}} + \frac{7}{3^x}$

$$3^x + \frac{3^x}{3} = \frac{45}{3^2 \cdot 3^x} + \frac{7}{3^x}$$

$$3^x + \frac{3^x}{3} = \frac{5}{3^x} + \frac{7}{3^x} \quad \text{Θέτω } y = 3^x$$

$$y + \frac{y}{3} = \frac{5}{y} + \frac{7}{y}$$

$$y + \frac{y}{3} = \frac{12}{y}$$

$$3y^2 + y^2 = 36$$

$$4y^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 9$$

$$y = 3 \quad \wedge \quad y = -3$$

$$3^x = 3 \quad \wedge \quad 3^x = -3$$

$$\underline{x = 1}$$

Αδύνατο

5. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 4^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1} \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} 3^x + 2^y = 11 \\ 3^x - 2^y = 7 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} 3^x + 2^y = 11 \\ 3^x - 2^y = 7 \end{cases} \quad \text{Θέζω} \quad a = 3^x \quad \text{και} \quad b = 2^y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{1} & a + b = 11 \\ a - b = 7 \end{cases}$$

$$2a = 18$$

$$a = 9$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$\underline{x = 2}$$

$$\text{και} \sim \textcircled{1} \quad 9 + b = 11$$

$$\Leftrightarrow b = 2$$

$$2^y = 2^1$$

$$\underline{y = 1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 5 χρόνια, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού είναι $Q(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{5}}$.

Πύση εκθετική απόσβεση $Q(t) = Q_0 e^{ct}$ ^① όπου $c < 0$
↖ αρχική

για $t = 5$ το $Q_0 \rightarrow \frac{Q_0}{2}$ (ημ.ζωή)

οπλ $Q(5) = \frac{Q_0}{2} \Leftrightarrow Q_0 \cdot e^{c \cdot 5} = \frac{Q_0}{2}$

$\Leftrightarrow e^{5c} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (e^c)^5 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^c = \sqrt[5]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow e^c = \sqrt[5]{2^{-1}} \Rightarrow e^c = 2^{-\frac{1}{5}}$ ^②

^① ^② $\Rightarrow Q(t) = Q_0 2^{-\frac{1}{5}t}$ ✓

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
 $a > 0$

$$\text{όταν } t = 1600 \text{ το } Q_0 \rightarrow \frac{Q_0}{2}$$

7. Το ραδιενεργό Ράδιο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού 1600 χρόνια. Αν η αρχική ποσότητα είναι 5 γραμμάρια, $\rightarrow Q_0 = 5$

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση, η οποία δίνει την ποσότητα του

$$\text{Ραδίου μετά } t \text{ χρόνια είναι } Q(t) = 5(0,5)^{\frac{t}{1600}}$$

ii) να υπολογίσετε την ποσότητα που θα έχει απομείνει μετά 600 χρόνια με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων.

iii) να αποδείξετε ότι μετά 20000 χρόνια μόλις 0,001 γραμμάρια θα έχουν απομείνει.

Λύση το $Q_0 = 5$ γρ. αρχική ποσότητα

$$i) \text{ όσω το } t = 1600 \text{ χρ. το } Q_0 \rightarrow \frac{Q_0}{2} : \text{ άρα } Q(1600) = \frac{5}{2}$$

$$\text{η γενική είναι } \boxed{Q(t) = Q_0 e^{ct}} = 5 e^{ct} \quad (1)$$

$$\text{άρα } Q(1600) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 5 e^{c \cdot 1600} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (e^c)^{1600} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^c = \sqrt[1600]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow e^c = \sqrt[1600]{0,5} \Leftrightarrow e^c = 0,5^{\frac{1}{1600}} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow (2) \quad Q(t) = 5 \cdot (0,5)^{\frac{1}{1600} t} = 5 \cdot (0,5)^{\frac{t}{1600}}$$

$$ii) \text{ για } t = 600 : Q(600) = 5 \cdot (0,5)^{\frac{600}{1600}} = 5 \cdot 0,5^{\frac{3}{8}} = 5 \sqrt[8]{0,5^3}$$

$$(0,5^3 = 0,125)$$

$$= 5 \sqrt[8]{0,125}$$