

# Μονότονες συναρτήσεις

## Προσδιορισμός μονοτονίας

### Μεθοδολογία

Για να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης  $f$  σ'ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ .
- Με κατάλληλες πράξεις κατασκευάζουμε την ανισότητα μεταξύ των  $f(x_1)$  και  $f(x_2)$ .
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα  $f(x_1) < f(x_2)$ , τότε η  $f$  είναι **γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$** .
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα  $f(x_1) > f(x_2)$ , τότε η  $f$  είναι **γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$** .

### Ιδιότητες της διάταξης

1. Πρόσθεση ενός αριθμού (θετικού ή αρνητικού) στα δύο μέλη μιας ανισότητας:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

2. Πολλαπλασιασμός των δύο μελών μιας ανισότητας με έναν αριθμό:

$$\text{Αν } \gamma > 0, \text{ τότε } \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$$

$$\text{Αν } \gamma < 0, \text{ τότε } \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$$

3. Πρόσθεση κατά μέλη δύο (ή περισσότερων) ανισοτήτων:

$$\begin{cases} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta$$

4. Πολλαπλασιασμός κατά μέλη δύο (ή περισσότερων) ανισοτήτων:

Για τους **θετικούς αριθμούς**  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\begin{cases} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\delta$$

5. Αν  $\alpha$  και  $\beta$  είναι **θετικοί αριθμοί**, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^v < \beta^v \quad \text{με } v \in \mathbb{N}$$

6. Διάταξη και αντίστροφοι αριθμοί:

Αν οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι **ομόσημοι**, τότε:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

## Μονοτονία και επίλυση εξίσωσης

### Πρόταση

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι **γνησίως μονότονη**, τότε η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  το πολύ μία φορά. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει **το πολύ μία ρίζα**.

### Μεθοδολογία επίλυσης εξίσωσης

Με τη βοήθεια της παραπάνω πρότασης μπορούμε να λύσουμε μια εξίσωση, που δε λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο, ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
- Θέτουμε το πρώτο μέλος ίσο με  $f(x)$ , οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή  $f(x) = 0$ .
- Βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .
- Αποδεικνύουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη, οπότε η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει το πολύ μία ρίζα. Έτσι η ρίζα που βρήκαμε προηγουμένως είναι μοναδική.

## Μονοτονία και επίλυση ανίσωσης

### Πρόταση

Έστω συνάρτηση  $f$  και  $x_1, x_2 \in D_f$ .

- Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Αν η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

### Μεθοδολογία επίλυσης ανίσωσης

Μια ανίσωση που δε λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο, μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια της μονοτονίας ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
- Θέτουμε το πρώτο μέλος ίσο με  $f(x)$ , οπότε η ανίσωση παίρνει τη μορφή  $f(x) < 0$  ή  $f(x) > 0$ .
- Αποδεικνύουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη.
- Βρίσκουμε μια ρίζα  $\rho$  της  $f(x)$ , δηλαδή έναν αριθμό  $\rho$  για τον οποίο ισχύει  $f(\rho) = 0$ . Έτσι η ανίσωση γίνεται:

$$f(\rho) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(\rho) \quad \text{ή} \quad f(\rho) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(\rho)$$

- Εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της  $f$ . Συγκεκριμένα:

➤ Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

$$f(x) < f(\rho) \Leftrightarrow x < \rho \quad \text{ή} \quad f(x) > f(\rho) \Leftrightarrow x > \rho$$

➤ Αν η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, τότε:

$$f(x) < f(\rho) \Leftrightarrow x > \rho \quad \text{ή} \quad f(x) > f(\rho) \Leftrightarrow x < \rho$$

### Ολικά ακρότατα συνάρτησης

Μια συνάρτηση  $f$  μπορεί να έχει και μέγιστο και ελάχιστο, μπορεί να έχει ελάχιστο και να μην έχει μέγιστο, μπορεί να έχει μέγιστο και να μην έχει ελάχιστο και τέλος, μπορεί να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο. Επίσης, μπορεί μια συνάρτηση να παρουσιάζει κάποιο ολικό ακρότατο σε περισσότερες από μία θέσεις.

### Προσδιορισμός ολικών ακροτάτων συνάρτησης

Για να βρούμε τα ολικά ακρότατα μιας συνάρτησης  $f$  με τη βοήθεια του ορισμού, εργαζόμαστε ως εξής:

- Κατασκευάζουμε ανισότητα της μορφής:

$$f(x) \geq \mu \quad \text{ή} \quad f(x) \leq M \quad \text{για κάθε } x \in D_f$$

- Λύνουμε την εξίσωση  $f(x) = \mu$  ή την εξίσωση  $f(x) = M$  και βρίσκουμε  $x_1, x_2$  τέτοια, ώστε:

$$f(x_1) = \mu \quad \text{ή} \quad f(x_2) = M$$

- Από τις ανισότητες  $f(x) \geq \mu$  ή  $f(x) \leq M$  προκύπτει ότι:
  - $f(x) \geq f(x_1)$  για κάθε  $x \in D_f$ , οπότε η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_1$  ελάχιστο, το  $f(x_1) = \mu$ ,
  - $f(x) \leq f(x_2)$  για κάθε  $x \in D_f$ , οπότε η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_2$  μέγιστο, το  $f(x_2) = M$ .

Για την κατασκευή ανισοτήτων της μορφής  $f(x) \geq \mu$  ή  $f(x) \leq M$  λαμβάνουμε υπόψη τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\alpha^2 \geq 0$  και γενικά  $\alpha^{2n} \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  και για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $|\alpha| \geq 0$  για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{\alpha} \geq 0$  για κάθε  $\alpha \geq 0$