

Παράγωγοι: Μονοτονία και τοπικά ακρότατα – Μεθοδολογία ασκήσεων και παρατηρήσεις

Μονοτονία συνάρτησης

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** σε όλο το Δ .

Παρατηρήσεις

- Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή, αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά ότι $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως ισχύει ότι $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Στα άκρα α και β ενός διαστήματος $[\alpha, \beta]$ δε μας ενδιαφέρει ούτε το πρόσημο της f' ούτε αν αυτή μηδενίζεται ούτε καν η ύπαρξή της.

Βασική μεθοδολογία για την εύρεση μονοτονίας συνάρτησης

Για να μελετήσουμε μια συνάρτηση f ως προς τη **μονοτονία**, εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού D_f της f .
- Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής.
- Βρίσκουμε την f' .
- Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$ και βρίσκουμε, αν υπάρχουν, τις ρίζες της f' .
- Βρίσκουμε το πρόσημο της f' είτε λύνοντας τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ είτε βρίσκοντας το πρόσημο της f' σε κάθε διάστημα που ορίζουν οι ρίζες της. (Αν δεν μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της f' , τότε βρίσκουμε παραγώγους ανώτερης τάξης, έως εκείνη της οποίας μπορούμε να βρούμε το πρόσημο.)
- Σχηματίζουμε πίνακα προσήμου της f' , στον οποίο σημειώνουμε τα άκρα του D_f και τις ρίζες της f' .
- Συμπληρώνουμε τον πίνακα με το είδος της μονοτονίας της f σε κάθε διάστημα.

Αλλαγή μονοτονίας και σύνολο τιμών

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Για να βρούμε το σύνολο τιμών της f , εργαζόμαστε ως εξής:

- Μελετάμε την f ως προς τη μονοτονία.
- Βρίσκουμε τα διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ του πεδίου ορισμού της f , σε καθένα από τα οποία η f διατηρεί μονοτονία.
- Βρίσκουμε τα διαστήματα $f(\Delta_1), f(\Delta_2), \dots$ και το σύνολο τιμών της f είναι η ένωση των παραπάνω διαστημάτων.

Μονοτονία συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Για να μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου, εργαζόμαστε ως εξής:

- Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο x_0 .
- Βρίσκουμε την f' για $x < x_0$ και για $x > x_0$. Δε χρειάζεται να εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , διότι αυτό δεν επηρεάζει τη μονοτονία της f .
- Βρίσκουμε το πρόσημο της f' για $x < x_0$ και για $x > x_0$.
- Σχηματίζουμε πίνακα με το πρόσημο της f' .
- Συμπληρώνουμε τον πίνακα με τη μονοτονία της f .

Ύπαρξη μοναδικής ρίζας με τη βοήθεια του συνόλου τιμών

Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μοναδική ρίζα και δε μας δίνουν συγκεκριμένο διάστημα (στο οποίο θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε θεώρημα Bolzano ή θεώρημα Rolle), τότε εργαζόμαστε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο πρώτο μέλος, το οποίο θεωρούμε ως συνάρτηση $f(x)$.
- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f .
- Αν το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f , τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ (άρα και η αρχική) έχει ρίζα.

Αν επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη, η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

Πλήθος ριζών εξίσωσης

Για να βρούμε το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης, εργαζόμαστε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο πρώτο μέλος, το οποίο θεωρούμε ως συνάρτηση $f(x)$.
- Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και βρίσκουμε τα διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ στα οποία η f διατηρεί μονοτονία.
- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2, \dots$, δηλαδή βρίσκουμε τα $f(\Delta_1), f(\Delta_2), \dots$
- Σε όσα από τα διαστήματα $f(\Delta_1), f(\Delta_2), \dots$ ανήκει το 0, τόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f(x) = 0$.

Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

Τοπικό μέγιστο – Ορισμός

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 ονομάζεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ ονομάζεται **τοπικό μέγιστο** της f .

Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο**, το $f(x_0)$.

Τοπικό ελάχιστο – Ορισμός

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

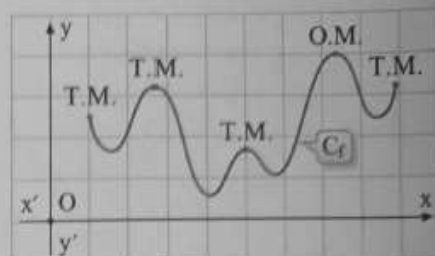
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 ονομάζεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ ονομάζεται **τοπικό ελάχιστο** της f .

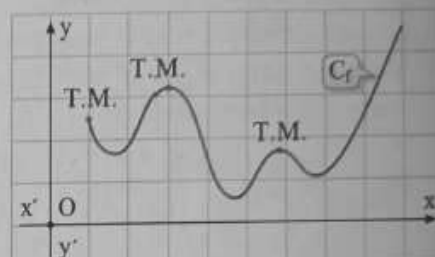
Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $f(x_0)$.

Επισημάνσεις για τα τοπικά ακρότατα

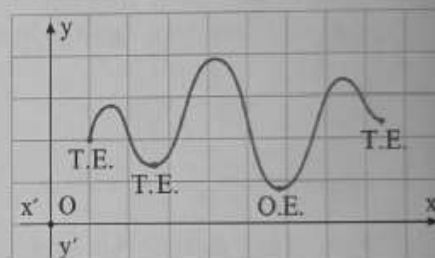
1. Αν μια συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο (O.M.), τότε αυτό είναι το **μεγαλύτερο** από τα τοπικά μέγιστα (T.M.) της f .



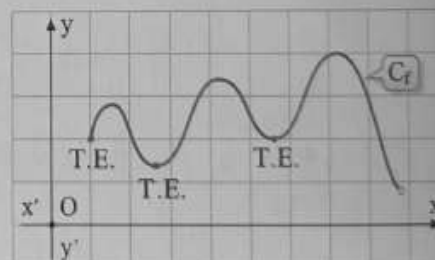
2. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα (T.M.) μιας συνάρτησης f δεν είναι υποχρεωτικά και ολικό μέγιστο της f . Για παράδειγμα, η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος δεν έχει ολικό μέγιστο.



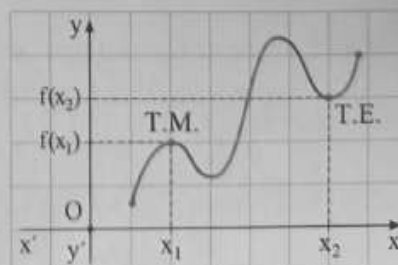
3. Αν μια συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο (O.E.), τότε αυτό είναι το **μικρότερο** από τα τοπικά ελάχιστα (T.E.) της f .



4. Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα (T.E.) μιας συνάρτησης f δεν είναι υποχρεωτικά και ολικό ελάχιστο της f . Για παράδειγμα, η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος δεν έχει ολικό ελάχιστο.



5. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.



Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν:

- x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ ,
- η f παρουσιάζει τοπικό ή ολικό ακρότατο στο x_0 ,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ,

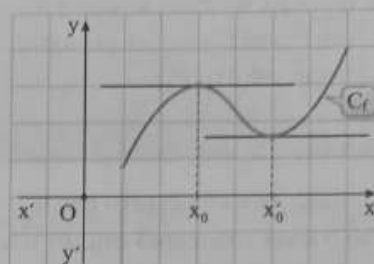
τότε ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.

Επισημάνσεις για το θεώρημα Fermat

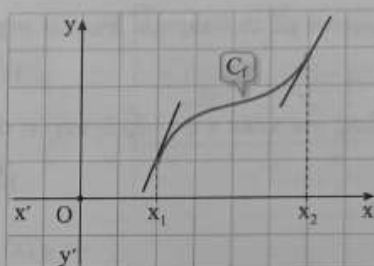
1. Γεωμετρικά το θεώρημα Fermat σημαίνει ότι αν μια συνάρτηση f σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε στο σημείο:

$$A(x_0, f(x_0))$$

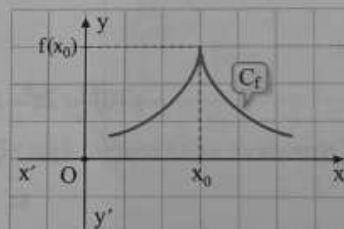
η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.



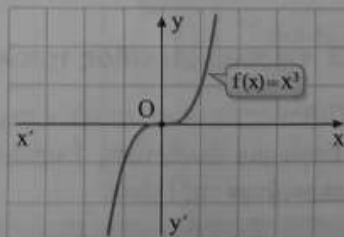
2. Το θεώρημα Fermat αναφέρεται στα εσωτερικά σημεία των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f . Για παράδειγμα, η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα έχει πεδίο ορισμού το $[x_1, x_2]$. Στα άκρα x_1 και x_2 του $[x_1, x_2]$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο αντίστοιχα, όμως είναι $f'(x_1) \neq 0$ και $f'(x_2) \neq 0$.



3. Δεν αρκεί η f να παρουσιάζει ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 . Πρέπει η f να είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Για παράδειγμα, η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα, στο εσωτερικό σημείο x_0 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Fermat.



4. Το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat δεν ισχύει. Ενδέχεται δηλαδή για μια συνάρτηση f να ισχύει $f'(x_0) = 0$ και το x_0 να μην είναι θέση ακροτάτου. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $f(x) = x^3$, με $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) = 3x^2$ με $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f'(0) = 0$, όμως στο $x_0 = 0$ η f δεν έχει ακρότατο.



5. Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ , τότε τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f' είναι διάφορη από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων – Κρίσιμα σημεία

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f ορισμένης σ' ένα διάστημα Δ είναι:

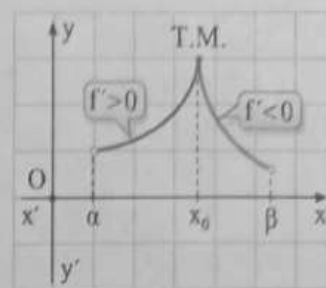
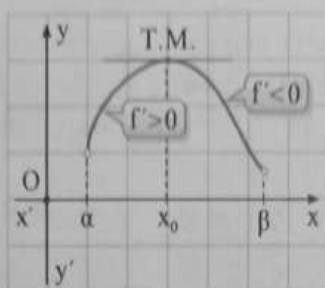
- τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f' μηδενίζεται,
- τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη,
- τα άκρα του διαστήματος Δ , εφόσον το Δ είναι κλειστό σε κάποιο απ' αυτά.

Ειδικότερα, τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f' μηδενίζεται ή η f δεν είναι παραγωγίσιμη, ονομάζονται **κρίσιμα σημεία** της f .

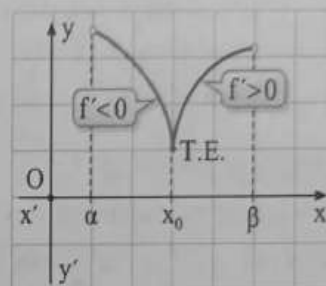
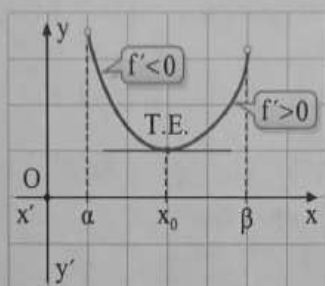
Θεώρημα - Κριτήριο τοπικών ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

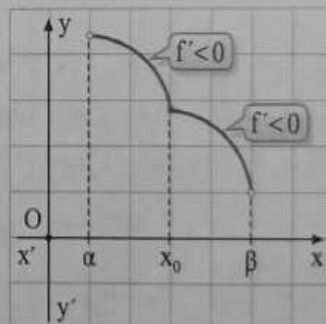
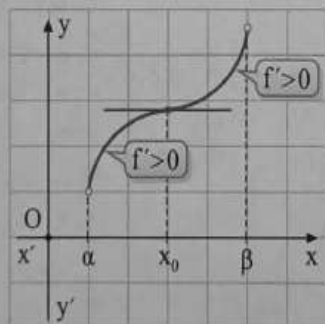
α) Αν ισχύει $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .



β) Αν ισχύει $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .



γ) Αν στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) .



Βασική μεθοδολογία για την εύρεση ακροτάτων συνάρτησης

Για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης f , εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού D_f της f .
- Βρίσκουμε την f' .
- Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$ και βρίσκουμε το πρόσημο της f' .
- Σχηματίζουμε πίνακα με τη μονοτονία της f' .

Αν σε κάποιο $x_0 \in D_f$ η f είναι συνεχής και αλλάζει μονοτονία, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f . Το είδος του ακροτάτου προκύπτει από το είδος της μονοτονίας που έχει η f εκατέρωθεν του x_0 .

Σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ'ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Ε.Τ. η f παρουσιάζει ελάχιστο μ και μέγιστο M . Το σύνολο τιμών της f είναι το $[\mu, M]$. Για να βρούμε το ελάχιστο και το μέγιστο της f , εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f , οι οποίες είναι τα κρίσιμα σημεία και τα άκρα κλειστών διαστημάτων του πεδίου ορισμού.
- Υπολογίζουμε τις τιμές της f στις παραπάνω θέσεις.
- Από τις παραπάνω τιμές, η μικρότερη είναι το ελάχιστο της f και η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο της f .

Απόδειξη ανισοτήτων με τη βοήθεια ακροτάτων

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής $A(x) \geq B(x)$ ή $A(x) \leq B(x)$, μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
- Θέτουμε το πρώτο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$, οπότε η ανισότητα παίρνει τη μορφή $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$.
- Μελετάμε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και διαπιστώνουμε ότι παρουσιάζει κάποιο ολικό ελάχιστο ή ολικό μέγιστο το 0, οπότε αντίστοιχα θα ισχύει $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$.