

Συνάρτηση $1 - 1$ και αντίστροφη συνάρτηση

Συνάρτηση $1 - 1$ και εξισώσεις

Μεθοδολογία

Όταν μας ζητούν να λύσουμε μια εξίσωση η οποία δεν μπορεί να λυθεί με κάποια γνωστή μέθοδο, τότε αυτό μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της $1 - 1$ ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
- Θέτουμε το πρώτο μέλος ίσο με $f(x)$, οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή $f(x) = 0$.
- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι $1 - 1$.
- Βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα x_0 της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- Η εξίσωση γίνεται $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0$, αφού $f : 1 - 1$.

Εύρεση της f^{-1}

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Για να βρούμε την αντίστροφη της f , εργαζόμαστε ως εξής:

- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι $1 - 1$.
- Θέτουμε $y = f(x)$ (οπότε είναι $f^{-1}(y) = x$).
- Λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x . Ταυτόχρονα βρίσκουμε τους περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιεί το y , ώστε η εξίσωση $y = f(x)$ να έχει λύση ως προς x και η λύση αυτή να ανήκει στο πεδίο ορισμού A της f .
- Η συναλήθευση των περιορισμών για το y μας δίνουν το σύνολο τιμών της f , το οποίο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- Αν η λύση της εξίσωσης $y = f(x)$ ως προς x είναι η $x = g(y)$, τότε έχουμε ότι $f^{-1}(y) = g(y)$. Θέτουμε όπου y το x και έχουμε έτσι τον τύπο $f^{-1}(x)$.

Η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$

Πρόταση

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια $1 - 1$ συνάρτηση, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της f^{-1} . Αν η f είναι **γνησίως αύξουσα**, τότε οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$, $f(x) = x$, $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη

➤ Έστω α μια λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$, δηλαδή $f(\alpha) = f^{-1}(\alpha)$. Τότε:

$$f(f^{-1}(\alpha)) = f(f(\alpha)), \text{ δηλαδή } f(f(\alpha)) = \alpha$$

Θα αποδείξουμε ότι $f(\alpha) = \alpha$. Εργαζόμαστε με απαγωγή σε άτοπο.

- Αν $f(\alpha) < \alpha$, τότε $f(f(\alpha)) < f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha < f(\alpha)$, άτοπο.
- Αν $f(\alpha) > \alpha$, τότε $f(f(\alpha)) > f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha > f(\alpha)$, άτοπο.

Άρα είναι $f(\alpha) = \alpha$.

➤ Έστω ότι $f(\alpha) = \alpha$. Τότε $\alpha = f^{-1}(\alpha)$ και έτσι $f^{-1}(\alpha) = f(\alpha)$.

Μονοτονία της f και της f^{-1}

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε και η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

Απόδειξη

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Θα αποδείξουμε ότι και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Έστω λοιπόν $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$. Θα αποδείξουμε ότι:

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Αφού $y_1, y_2 \in f(A)$, θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in D_f$ τέτοια, ώστε:

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{και} \quad f(x_2) = y_2$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$f^{-1}(y_1) = x_1 \quad \text{και} \quad f^{-1}(y_2) = x_2$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} y_1 < y_2 &\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \quad (\text{αφού } f \text{ γνησίως αύξουσα}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

Άρα και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Όμοια εργαζόμαστε και για f γνησίως φθίνουσα.