

1. Τα μήκη των πλευρών α , β , γ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι : $\alpha=7$, $\beta=3$ και $\gamma=5$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της.

2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$, $A\Gamma = 6$ και $B\Gamma = 11$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην AB και να υπολογίσετε το μήκος της.

3. Στο παρακάτω σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔE έχουν μήκη αντίστοιχα 12, 16, 8 και 10, οι γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{\Delta\Gamma E}$ είναι ορθές και τα σημεία A, Γ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.

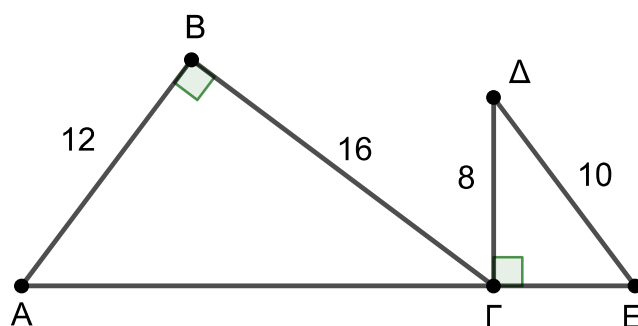
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE .

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ είναι όμοια.

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και $E\Delta$ είναι το Z και ZH είναι το ύψος του τριγώνου ZAE από την κορυφή του Z . Να αποδείξετε ότι:

i. $EH = 13$,

ii. $ZH = \frac{52}{3}$.



4. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$, $B\Gamma = \sqrt{41}$ και $A\Gamma = 8$.

α) Να σχεδιάσετε την προβολή AD , της AB στην $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της.

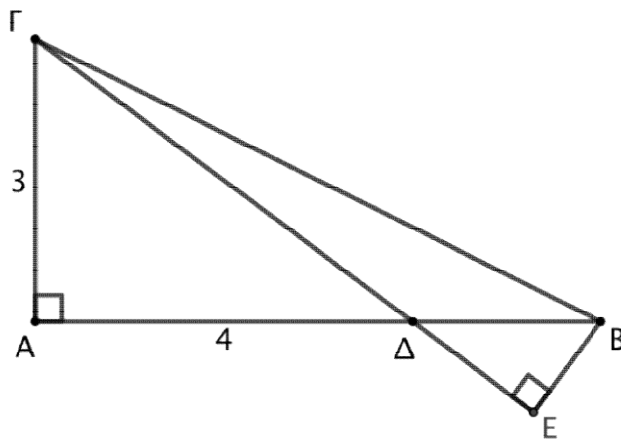
β) Αν $AD = 3$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους BD .

5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 6$ και $A\Gamma = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά AB , τέτοιο ώστε $A\Delta = 4$. Φέρουμε την απόσταση BE της κορυφής B από την $\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα $\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $E\Delta B$ είναι όμοια.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BE .



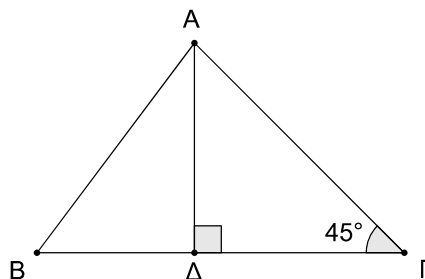
6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 7$, $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ και ύψος $A\Delta = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma\Delta = 4$.

ii. $A\Gamma = 4\sqrt{2}$.

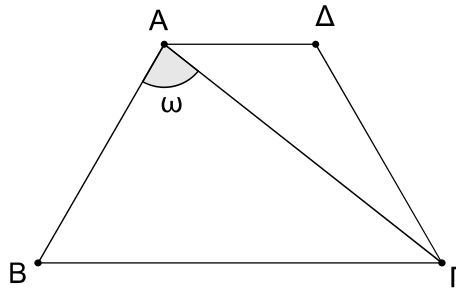
β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AB .



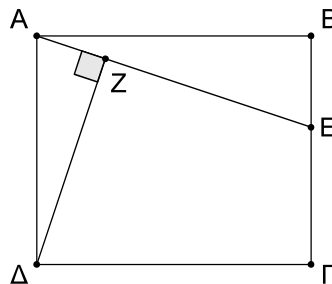
7. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος είναι $A\Delta = 3$, $AB = \Gamma\Delta = 5$, $B\Gamma = 8$ και $\hat{\Delta} = 120^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 7$.

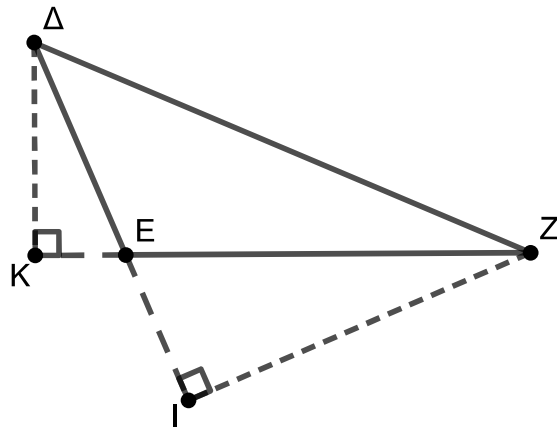
β) Να αποδείξετε ότι $\sin \omega = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$.



8. Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AB = 6$ και το E σημείο της πλευράς $B\Gamma$, ώστε $BE = 2$. Έστω ΔZ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την AE .
- Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$.
 - Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και ΔZA είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.
 - Αν $\Delta Z = ZE$, να υπολογίσετε το μήκος του $A\Delta$.



9. Στα παρακάτω τρίγωνο ΔEZ φέρουμε τα ύψη του ΔK και ZI .
- Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
 - Η προβολή της πλευράς ΔE στην πλευρά EZ είναι το τμήμα
 - Η προβολή της πλευράς ΔZ στην πλευρά EZ είναι το τμήμα
 - Το τμήμα ΔI είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
 - Το τμήμα EI είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
 - $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \dots + 2 \cdot EZ \cdot \dots$
 - $EZ^2 = \dots + \Delta Z^2 - 2 \cdot \dots \cdot \Delta I$
 - Αν $\Delta E = 2$, $EZ = 4$ και $\Delta Z = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔI .



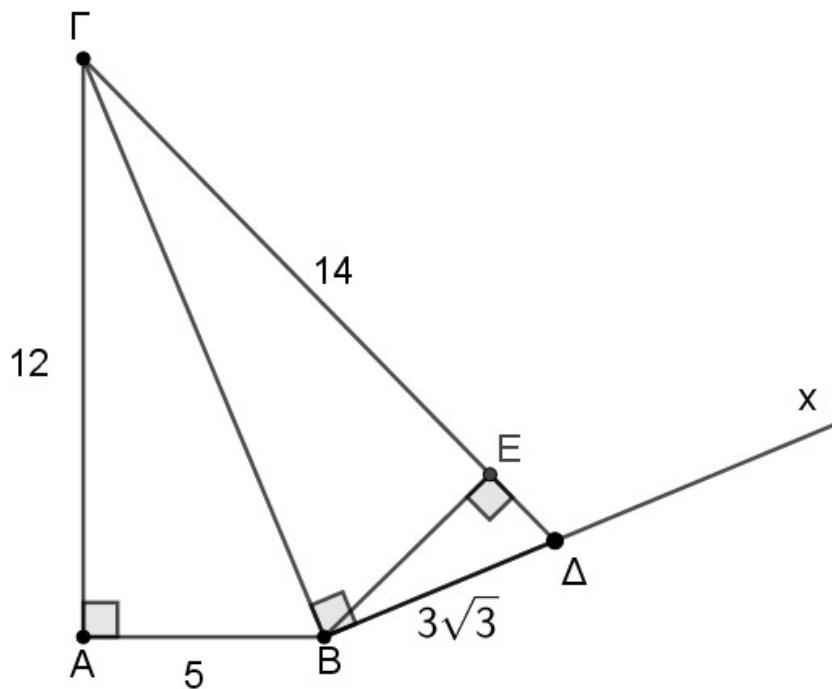
10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$, $A\Gamma = 12$ και $AB = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 13$.

β) Φέρουμε ημιευθεία Bx κάθετη στη $B\Gamma$ στο σημείο B και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Delta\Gamma = 14$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = 3\sqrt{3}$.

ii. Να υπολογίσετε την προβολή της $B\Delta$ στην $\Delta\Gamma$.



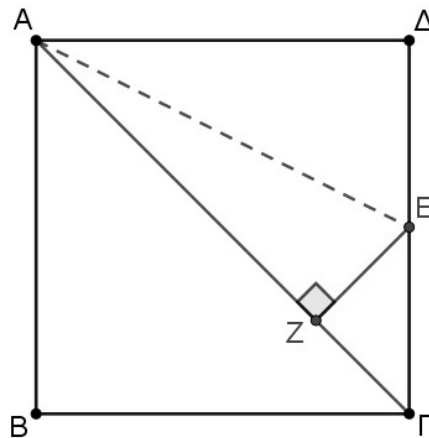
11. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α και έστω E το μέσο της $\Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΓ = α\sqrt{2}$.

ii. $ΑΕ = α\frac{\sqrt{5}}{2}$.

β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ.

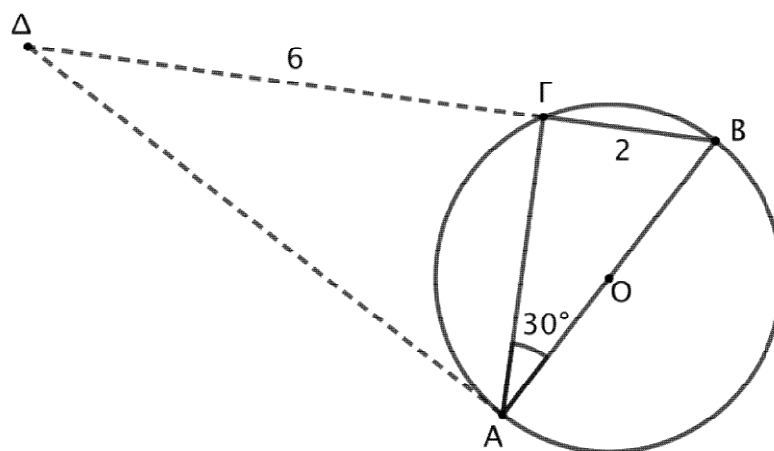


12. Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο $ΑΒ$ και σημείο $Γ$ του κύκλου τέτοιο ώστε $\widehat{ΒΑΓ} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $ΒΓ = 2$, τότε:

α) Να υπολογίσετε:

- i. Την ακτίνα R .
- ii. Το μήκος της πλευράς $ΑΓ$.

β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της $ΒΓ$ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα $\Delta Α$ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

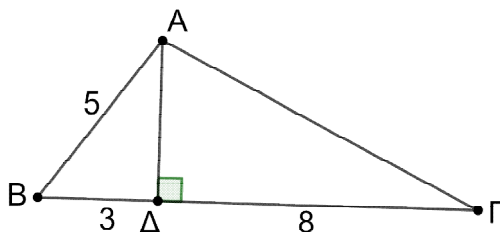


13. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$ και $A\Delta$ το ύψος του από την κορυφή A . Αν $B\Delta = 3$ και $\Gamma\Delta = 8$ να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = 4$.

β) $A\Gamma = \sqrt{80}$.

γ) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.



14. Τρία ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο.

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση $\lambda\%$, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο.

γ) Να εξετάστε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α , 8β και 6γ .

15. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R . Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι $B\Gamma = \alpha$, $A\Gamma = \beta$ και $AB = \gamma$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha = 2R$.

β) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$.

16. Τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνεται ότι $AB = 9$, $A\Gamma = 12$, $A\Delta = 4$ και $AE = 3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 15$, (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

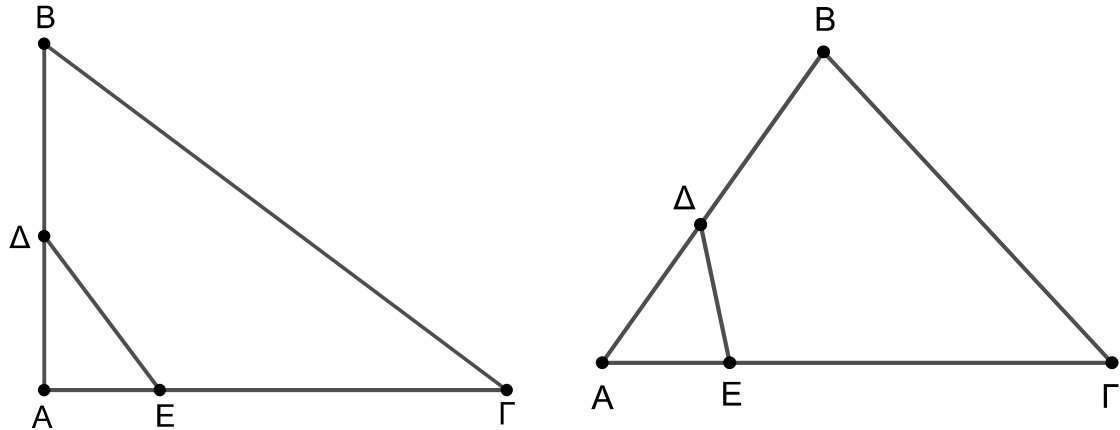
iii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

iv. $\Delta E = 5$.

β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 10$, (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ δεν είναι ορθογώνιο.

ii. $\Delta E = \frac{10}{3}$.



17. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma=20$ και αντίστοιχο ύψος $AD=8$.

Αν $B\Delta > \Delta\Gamma$ τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος της $\Delta\Gamma$.

β) Αν $\Delta\Gamma=4$, να βρείτε τα μήκη των AB και AG .

18. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $AB=3\sqrt{2}$ και $AD=3$. Αν AE και ΓZ είναι ύψη των τριγώνων $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ αντιστοίχως, τότε

α) Να υπολογίσετε την διαγώνιο $B\Delta$ του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = ZB = \sqrt{3}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $ZE = \Delta E = BZ$.

