

## Κεφάλαιο 4

### 4.1 Ανισώσεις 1<sup>ου</sup> βαθμού

**Επίλυση της ανίσωσης  $\alpha x + \beta > 0$ :**

Είναι:  $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν  $\alpha > 0$ :

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow x > -\frac{\beta}{\alpha}$$

- Αν  $\alpha < 0$ :

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow x < -\frac{\beta}{\alpha}$$

**Ανισότητες της μορφής  $|x - x_0| < \rho$  και  $|x - x_0| > \rho$**

Για  $x_0 \in \mathbb{R}$  και  $\rho > 0$ , ισχύει:

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

Για  $x_0 \in \mathbb{R}$  και  $\rho > 0$ , ισχύει:

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$

## Ασκήσεις

### Άσκηση 1

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $3(x-2)-5(x+1) \geq 3-2(3-x)$   
ii.  $\frac{x}{3}-\frac{x-4}{6} < 2-\frac{4-x}{4}$

### Άσκηση 2

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $x+3-\frac{3x-5}{2} > 2-\frac{x}{2}$   
ii.  $\frac{x-3}{4}-\frac{x+5}{2} < -1-\frac{10+x}{4}$

### Άσκηση 3

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$4-5(x-2) \geq 13-3(x+1) \text{ και } 1-\frac{7-x}{4} > \frac{x}{2}$$

### Άσκηση 4

Να λύσετε την ανίσωση  $1-2(2x+1) \leq 5-2x < 4-\frac{8x-7}{3}$ . Ποιες είναι οι ακέραιες λύσεις της παραπάνω ανίσωσης;

### Άσκηση 5

Να λύσετε την ανίσωση  $2(\lambda - x) \leq \lambda x - \lambda(2x - \lambda)$  για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ .

### Άσκηση 6

Δίνεται ο αριθμός:

$$\lambda = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5} - 2}{5 + 2\sqrt{5}}$$

- i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\lambda$  είναι ακέραιος.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{(x-3)^2 - 1}{\lambda^{\frac{2}{3}}} - \frac{(2x-1)^2 - 3}{\lambda^{\frac{4}{3}}} < \frac{17}{\lambda}$$

### Άσκηση 7

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $|3x| \leq 6$
- ii.  $|1 - x| \leq 3$
- iii.  $|2x + 3| < 1$
- iv.  $|4 - 2x| \leq 10$

### Άσκηση 8

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $|2x| \geq 8$
- ii.  $|x - 5| > 2$
- iii.  $|x + 4| \geq 3$
- iv.  $|1 - 2x| \geq 5$

### Άσκηση 9

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $|5 - 2x| - 3 < 0$
- ii.  $|6 - x| - 4 \leq 0$
- iii.  $|2x + 7| - 1 > 0$
- iv.  $|3 - x| - 2 \geq 0$
- v.  $5 - |7 - 2x| < 0$
- vi.  $6 - |4x - 2| \geq 0$

### Άσκηση 10

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $3 - \frac{|x-1|}{3} \geq 1$
- ii.  $\frac{7 - |x+5|}{4} < 1$
- iii.  $\frac{2|3-x|+3}{5} \leq 3$

### Άσκηση 11

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $|7x + 3| > -1$
- ii.  $|x + 5| \geq -3$
- iii.  $|2x - 6| \leq 0$
- iv.  $|x + 2| > 0$

### Άσκηση 12

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $|x-1| + |2x-2| > |5x-5| - 6$
- ii.  $|2x-1| + 2 - \frac{|6x-3|}{8} \geq \frac{|4-8x|+3}{5}$

### Άσκηση 13

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $d(x, 3) \leq 2$
- ii.  $d(x, -4) > 3$
- iii.  $d(2x, -5) < 7$
- iv.  $d(x, 3) > d(x, -1)$
- v.  $d(2x, -1) < 2d(x, 4)$

### Άσκηση 14

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $1 < |x + 5| < 3$
- ii.  $3 < |2x - 1| \leq 5$
- iii.  $5 \leq |3x - 1| < 8$
- iv.  $4 \leq |6 - 2x| \leq 10$

### Άσκηση 15

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $|x + 3| > 2x - 5$
- ii.  $|6 - x| \leq 2x$
- iii.  $4 - |x - 2| \geq 3$
- iv.  $3 - \frac{x-3}{2} \leq |x + 2|$
- v.  $|2x - 1| \geq 2|x - 2|$
- vi.  $|3 - 2x| - 2|x - 3| > 0$

### Άσκηση 16

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $||x| - 3| < 2$
- ii.  $|7 - |2x - 1|| \geq 10$
- iii.  $|2x - 1| > 3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|$
- iv.  $x - |2x - 3| \leq \left|\frac{3}{2} - x\right|$

### Άσκηση 17

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $3|x - 1| - 2|x - 3| \geq 5$
- ii.  $|x + 2| - |5 - x| \leq 2x$
- iii.  $d(x, 3) > |2x + 2| - d(x, -1)$
- iv.  $|2x - 4| + d(x, 2) \leq 12 - |2 - x|$

### Άσκηση 18

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $\sqrt{4x^2 - 8x + 4} + |x - 1| < 12$
- ii.  $\sqrt{9x^2 - 36x + 36} + |2x - 4| > 15$

### Άσκηση 19

Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει:

- i.  $6 < \sqrt{x^2 - 6x + 9} + |2x - 6| \leq 15$
- ii.  $5 \leq \sqrt{x^2 - 8x + 16} + |16 - 4x| < 20$

### Άσκηση 20

Έστω A και B τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς -6 και 2 αντίστοιχα και M το μέσο του τμήματος AB.

- i. Να βρείτε τον αριθμό που αντιστοιχεί στο σημείο M.
- ii. Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης  $|x - 2| \geq |x + 6|$  και να βρείτε τις λύσεις της.
- iii. Να διατυπώσετε αλγεβρικά το συμπέρασμά σας.

## 4.2 Ανισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού

### Παραγοντοποίηση τριωνύμου

| Διακρίνουσα $\Delta$ | Ρίζες                                                | Μορφή του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$                                                  |
|----------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta > 0$         | $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ | $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$                                           |
| $\Delta = 0$         | $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$                       | $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \alpha(x - x_0)^2$ |
| $\Delta < 0$         | Δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες.                      | Δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.                                                   |

### Ασκήσεις

#### Άσκηση 1

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

- i.  $2x^2 + 5x - 3$
- ii.  $-9x^2 + 6x - 1$
- iii.  $x^2 - 3x + 4$

#### Άσκηση 2

Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

- i.  $A = -(2x - 3y)^2 + 2(2x - 3y) + 8$
- ii.  $B = x^2 - \lambda x - x + 2(\lambda - 1)$
- iii.  $\Gamma = 2x^2 - xy - 6y^2$

#### Άσκηση 3

Δίνεται η παράσταση  $A = \frac{3x^2 - 5x + 2}{3x^2 + 4x - 4}$

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές ορίζεται η παράσταση A.
- ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση A.



### Πρόσημο τιμών τριωνύμου

- Αν  $\Delta > 0$ , τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες  $x_1, x_2$ , έστω με  $x_1 < x_2$ , και ισχύει ότι:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - x_1)(x - x_2)$$

Για να βρούμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

- Το πρόσημο είναι ετερόσημο του  $\alpha$  εντός των ριζών,
- Το πρόσημο είναι ομόσημο του  $\alpha$ , εκτός των ριζών της εξίσωσης.

- Αν  $\Delta = 0$ , τότε το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα, τη  $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ , και ισχύει ότι:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \alpha (x - x_0)^2$$

Για να βρούμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

- Το πρόσημο είναι παντού ομόσημο του  $\alpha$ ,
- Το τριώνυμο μηδενίζεται για  $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ .

- Αν  $\Delta < 0$ , τότε το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και το προσημό του είναι ομόσημο του  $\alpha$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

## Ασκήσεις

### Άσκηση 1

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $x^2 + 3x - 10 > 0$
- ii.  $-2x^2 - 5x + 3 \geq 0$
- iii.  $x^2 - 10x + 25 \geq 0$
- iv.  $-x^2 + 2x - 1 < 0$
- v.  $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$
- vi.  $-x^2 + 4x - 4 > 0$
- vii.  $2x^2 - 4x + 3 > 0$
- viii.  $-x^2 + 3x - 4 \geq 0$

### Άσκηση 2

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $x^2 > 9$
- ii.  $4x^2 - 9 \leq 0$

### Άσκηση 2

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \text{ και } -x^2 + x + 20 \geq 0$$

### Άσκηση 3

Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i.  $x^2 - 7|x| + 10 > 0$
- ii.  $-x^4 + 5x^2 - 4 \geq 0$

#### Άσκηση 4

Να λύσετε την ανίσωση:  $|2x-1| \leq |x+3|$

#### Άσκηση 5

Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$(5x-2y)^2 - 3(5x-2y) + 4 > 0$$

#### Άσκηση 6

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση:

$$(\lambda-3)x^2 - 2(\lambda-1)x + 2\lambda - 5 = 0$$

η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες και άνισες.

#### Άσκηση 7

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  το τριώνυμο  $\lambda x^2 - 4x + \lambda - 3$ , με  $\lambda \neq 0$  διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Άσκηση 8

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  ισχύει:

- i.  $(\lambda-2)x^2 + (\lambda+1)x + \lambda+1 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- ii.  $(\lambda-3)x^2 + 8x + \lambda+3 < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

#### Άσκηση 9

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  ισχύει:

- i.  $(\lambda-2)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 3 \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- ii.  $(14-\lambda)x^2 - (7+\lambda)x + 2(7-\lambda) \leq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

### Άσκηση 10

Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  ισχύει:

$$(\lambda - 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 1 > 0$$