

Κεφάλαιο 3

3.1 Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Η επίλυση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$

Οι συντελεστές α , β της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ μπορεί να είναι συγκεκριμένοι αριθμοί, αλλά μπορεί και να εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων. Σ' αυτές τις περιπτώσεις τα γράμματα ονομάζονται παράμετροι, η εξίσωση παραμετρική και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της ονομάζεται διερεύνηση. Η επίλυση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$, όποιοι και αν είναι οι συντελεστές α και β , γίνεται ως εξής:

$$\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση: Αν $\alpha \neq 0$, τότε έχουμε:

$$\alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Δηλαδή η εξίσωση έχει μοναδική λύση.

2^η περίπτωση: Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται:

$$0x = -\beta$$

Έτσι έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση και λέμε ότι είναι αδύνατη,
- Αν $\beta = 0$, τότε η εξίσωση έχει τη μορφή $0x = 0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , είναι δηλαδή ταυτότητα (ή αόριστη).

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λύσετε την εξίσωση $\lambda^2(x-1)=4(x-\lambda+1)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

Άσκηση 2

Δίνεται η εξίσωση $3(x+3)-\lambda^2(1-x)=-3x(\lambda-1)$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η παραπάνω εξίσωση είναι:

- i. ταυτότητα,
- ii. αδύνατη

Άσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση $\lambda(x+3\lambda)=4(\lambda-1)(\lambda+1)-2x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η παραπάνω εξίσωση έχει:

- i. λύση το -2
- ii. μοναδική λύση το -2

Άσκηση 4

Δίνεται η εξίσωση $\lambda(x+3)-2(x+\mu)-4=0$

a) Να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ , η εξίσωση είναι:

- i. ταυτότητα,
- ii. αδύνατη.

b) Αν $\mu=1$ και η εξίσωση έχει μοναδική λύση, τότε να τη βρείτε.

Άσκηση 5

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $\lambda x = \lambda(\lambda + 1)$
- ii. $\lambda(\lambda - 2)x = 2\lambda - 4$
- iii. $(\lambda - 1)(\lambda + 3)x = 3 - 3\lambda$
- iv. $(\lambda + 1)(\lambda - 4)x = \lambda^2 - 16$

Άσκηση 6

Για τις διάφορες τιμές του λ , να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $\lambda x - 3\lambda = \lambda^2 - 3x$
- ii. $\lambda x + 1 = \lambda^2 - x$
- iii. $\lambda^2 x - 4\lambda = 16x - \lambda^2$
- iv. $4 - \lambda(\lambda - 2x) = -\lambda^2 x$

Άσκηση 7

Για τις διάφορες τιμές του λ , να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $\lambda^2(\lambda x - \lambda + 2) - \lambda(x + 1) = 0$
- ii. $2\lambda^2 x - \lambda^2(\lambda^2 x - 1) = -2\lambda(\lambda x - 1)$
- iii. $\lambda^3(x - 1) - 6\lambda(x + \lambda) = 3\lambda(x - 3\lambda)$
- iv. $(\lambda^2 x - 2)(\lambda - 2) + \lambda x - (\lambda - 1)^2 = 2$

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\lambda^2(x - \lambda) - \lambda(x - 1) = 0$$

δεν είναι αδύνατη για καμία τιμή του λ .

Άσκηση 9

Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda^2(x+4) - 5\lambda(x+\lambda) = -25$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η παραπάνω εξίσωση είναι:

- i. ταυτότητα,
- ii. αδύνατη

Άσκηση 10

Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda(x-5) = -2(\mu-x-2)$$

Να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ , η παραπάνω εξίσωση είναι:

- i. ταυτότητα
- ii. αδύνατη

Άσκηση 11

Να λύσετε την εξίσωση $4 - x(x-2)^2 - (x-3)^2 = 9 - (x-1)^3$.

Άσκηση 12

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $x^3 - 9x = 0$
- ii. $(x+1)^2 - (x-3)(x+3) = 0$
- iii. $x^3 - x(x-2)(x+2) = 12$
- iv. $x(x-2)^2 - 4 = 0$
- v. $x^2(x-4) + 2x(x-4) + x - 4 = 0$
- vi. $x(x^2 - 1) - x^3 + x^2 = 0$

Άσκηση 13

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $\frac{x}{x^2-9} + \frac{2}{3x-x^2} = \frac{2}{x^2+3x}$
- ii. $\frac{4x}{x^2-x} = \frac{4}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}$
- iii. $\frac{x-14}{x^2-4} + \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x+2}$

Άσκηση 14

Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x^2+1| - |4x-x^2-4| - 5 = 0$$

Άσκηση 15

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $|2x-1| = 5$
- ii. $\frac{3|x-2|-1}{2} = 4$
- iii. $|x+3| + 2 = 0$
- iv. $\frac{|x+1|+6}{2} = 3$

Άσκηση 16

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $\frac{4-5|x-3|}{12} - \frac{|3x-9|-3}{2} = |6-2x|-6$
- ii. $\frac{3|x-3|}{4} = 2 + \frac{|3-x|}{2}$
- iii. $\frac{|x-2|}{2} = \frac{11}{20} - \frac{|6-3x|}{5}$
- iv. $|5x-20|-3 = |12-3x|+11$

$$\text{v. } \frac{|x-3|}{2} + \frac{|6-2x|}{3} = 8 - \frac{|3-x|}{6}$$

Άσκηση 17

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $|2x+3| = |x+9|$
- ii. $2|3-x| - |2x+5| = 0$
- iii. $|3x-2| - |x+6| = 0$
- iv. $2|x+3| = |x-5|$
- v. $\frac{|2x-1|}{3} = \frac{|3-x|}{2}$
- vi. $\frac{|x+1|}{4} - \frac{|3x-2|}{6} = 0$

Άσκηση 18

Να λύσετε τις εξισώσεις

- i. $|x-4| = 5-2x$
- ii. $|x-3| = 2x-7$
- iii. $2|x-4| = 2-x$
- iv. $x - \frac{|x-1|}{2} = 0$
- v. $2|x-4| - x + 3 = 0$

Άσκηση 19

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $|x-3| = x-3$
- ii. $|2x-5| = 5-2x$

$$\text{iii. } |12 - 4x| - 4x = -12$$

$$\text{iv. } 5 - |x - 5| = x$$

$$\text{v. } x - |x - 13| = 13$$

Άσκηση 20

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i. } |x^2 - 9| + |x^2 + 3x| = 0$$

$$\text{ii. } |x^2 - 4| + |x^2 + 4x + 4| = 0$$

$$\text{iii. } |x^2 - 2x - 3| + |9 - x^2| = 0$$

Άσκηση 21

Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i. } ||x + 1| - 2| = 3$$

$$\text{ii. } |5 - |2x - 1|| = 4$$

Άσκηση 22

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i. } x^2 - 2|x| + 1 = 0$$

$$\text{ii. } |x|^3 - 4x^2 = 0$$

$$\text{iii. } |x - 2| - x^2 + 4x - 4 = 0$$

Άσκηση 23

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i. } \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x - 1.$$

ii. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 0$

Άσκηση 24

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- i. $d(x, 2) = 3$
- ii. $d(2, 5x) - d(-3, x) = 0$
- iii. $x - d(2x, -6) = 4$

Άσκηση 25

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- i. $|x - 3| \cdot |x + 2| = |x - 3|$
- ii. $|2x + 3| \cdot |x - 1| = |7 - 7x|$
- iii. $|x - 4| \cdot |x + 5| = |2x + 7| \cdot |4 - x|$

Άσκηση 26

Δίνεται ο αριθμός:

$$a = \sqrt[3]{2^3 \sqrt{2^2 \sqrt[4]{2}}} \cdot \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[8]{2^7}$$

- i. Να βρείτε τον αριθμό a .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση:

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot \left(|x + 1| - a^{\frac{2}{3}} \right) = x$$

Άσκηση 27

Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{x^2 + 3|x|}{x^2 - 9} - \frac{|x| - 3}{x^2 - 6|x| + 9}$$

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
- ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $A=3$.

3.2 Η εξίσωση $x^v = \alpha$

Για μια εξίσωση της μορφής $x^v = \alpha$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

$x^v = \alpha$	ν:άρτιος	ν:περιττός
$\alpha > 0$	$x = \pm \sqrt[v]{\alpha}$	$x = \sqrt[v]{\alpha}$
$\alpha < 0$	αδύνατη	$x = -\sqrt[v]{ \alpha }$

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $x^4 = 16$
- ii. $x^3 = -27$
- iii. $x^6 = -64$
- iv. $x^3 = \frac{1}{8}$
- v. $x^4 = \frac{81}{16}$

Άσκηση 2

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $8x^3 = 27$
- ii. $32x^5 + 1 = 0$
- iii. $2x^5 = 8x^3$
- iv. $3x^4 + 24x = 0$
- v. $5x^6 + 4x^2 = 0$
- vi. $32x^{11} = -2x^7$

Άσκηση 3

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $x^5 = 2^{15}$

- ii. $5x^6 - 5^{13} = 0$
- iii. $49x^8 = 7^{18}$
- iv. $x^{12} + 3^{12} = 0$
- v. $x^{11} + 5^{11} = 0$
- vi. $x^8 - 9^4 = 0$

Άσκηση 4

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $x^4 - 8x = 0$
- ii. $x^6 - 16x^2 = 0$
- iii. $2x^5 + 16x^2 = 0$
- iv. $27x^4 + x = 0$
- v. $8x^4 + x^2 = 0$
- vi. $8x^5 + 27x^2 = 0$

Άσκηση 5

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $(x^{12} - 16^6)(x^9 + 8^3) = 0$
- ii. $(x^3 + 27)(x^4 - 5^4) = 0$
- iii. $(3x^{10} - 3^{31})(4x^9 - 2^{20}) = 0$

Άσκηση 6

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $2x^3 = 8x$
- ii. $x^6 = 81x^2$
- iii. $2x^5 + 5x^2 = x^5 - 3x^2$
- iv. $x^3(x^3 + 30) = 3x^3$

- v. $2x^2(2x^2 + 3) = 3x^4 - 2x^2$
vi. $5x(x^3 - 5) = 2x(2x^3 + 1)$

Άσκηση 7

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $(x-3)^3 = 8$
ii. $(2x-1)^3 = -27$
iii. $(4-x)^5 - 32 = 0$
iv. $(3-2x)^4 - 81 = 0$

Άσκηση 8

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $(|x-2|-3)^3 = 8$
ii. $(|2x-1|-6)^3 + 27 = 0$
iii. $(|3-x|-5)^4 = 16$
iv. $(|2x+5|-1)^4 - 81 = 0$

Άσκηση 9

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $(3x^4 - 46)^3 = 8$
ii. $(x^4 + 2)^4 - 81 = 0$
iii. $(2x^3 - 13)^3 - 27 = 0$
iv. $(2x^2 - 10)^4 - 2^{12} = 0$

Άσκηση 10

- i. $(x+2)^4 - 8(x+2) = 0$
- ii. $(2x+1)^5 = 81(2x+1)$
- iii. $27 - (2x-1)^4 = 54x$
- iv. $(x-1)^5 + 81 = 81x$
- v. $x^9 - 16x^5 - x^4 + 16 = 0$
- vi. $x^{10} + 81 - x^4 = 81x^6$

Άσκηση 11

Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = \sqrt{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{12}-3} \cdot \sqrt{\sqrt{12}+3}}$$

και:

$$\beta = \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt[8]{2}$$

- i. Να βρείτε τους αριθμούς α και β .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^7 + \beta^{\frac{3}{2}} \cdot x^4 - x^\alpha = 8$$

Άσκηση 12

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$|\alpha^5 - 32| + \left| \beta^3 + 9\alpha + 81^{\frac{1}{2}} \right| = 0$$

- i. Να βρείτε τους αριθμούς α και β .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x + \alpha| = \alpha x + \beta$$

3.3 Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Μία εξίσωση που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \text{ με } \alpha \neq 0$$

λέγεται εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Για την επίλυση μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού ακολουθούμε τον παρακάτω πίνακα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $-\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 1

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- i. $2x^2 + x - 6 = 0$
- ii. $x^2 - 6x + 9 = 0$
- iii. $2x^2 - 5x + 4 = 0$

Άσκηση 2

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- i. $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$
- ii. $x - 2(2 - x)(x + 2) = (x + 3)^2 - 23$

Άσκηση 3

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- i. $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$
- ii. $-2x^2 + (\alpha - 3)x + \alpha - 1 = 0$
- iii. $-x^2 + (2\alpha + \beta)x - \alpha(\alpha + \beta) = 0$

Άσκηση 4

Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του λ τις εξισώσεις:

- i. $\lambda x^2 - (\lambda - 2)x - 2 = 0$
- ii. $(\lambda - 3)x^2 + 2\lambda x + \lambda + 3 = 0$
- iii. $(\lambda - 2)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda + 4 = 0$

Άσκηση 5

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να βρείτε:

- i. $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta - 1 = 0$
- ii. $x^2 + (2\alpha - \beta)x + \alpha^2 - \alpha\beta - 2\beta^2 = 0$
- iii. $(\alpha^2 - \beta^2)x^2 - 2\alpha\beta^2x - \alpha^2\beta^2 = 0$, με $\alpha^2 \neq \beta^2$

Άσκηση 6

Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων:

- i. $x^2 + (\alpha - 2)x - \alpha = 0$
- ii. $\alpha x^2 - (2\alpha + \beta)x + \alpha + \beta = 0$, με $\alpha \neq 0$
- iii. $x^2 - (\alpha + \gamma)x + \alpha\gamma - \beta^2 = 0$

Άσκηση 7

Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων για τις διάφορες τιμές του λ :

- i. $x^2 - (2\lambda - 4)x - \lambda(3 - \lambda) = 0$
- ii. $(\lambda - 3)x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda + 3 = 0$

Άσκηση 8

Αν η εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 1 = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda^2 + \frac{9}{4} = 0$ είναι αδύνατη.

Άσκηση 9

Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda + \frac{9}{4} = 0, \text{ με } \lambda \neq 0$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση:

- i. έχει δύο ρίζες άνισες,
- ii. έχει μια διπλή ρίζα,
- iii. δεν έχει πραγματικές ρίζες,

Άσκηση 10

Η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα 4.

- i. Να βρείτε τις τιμές του λ .
- ii. Για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Άσκηση 11

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 + (4\lambda - 2)x + (2\lambda - 1)^2 = 0$$

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα για κάθε πραγματικό αριθμό λ .
- ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η διπλή ρίζα της εξίσωσης βρίσκεται στο διάστημα $(-3, 5)$.

Άσκηση 12

Η εξίσωση:

$$(\lambda - 1)x^2 + \lambda^2 x - \lambda = 0 \quad (1)$$

έχει δύο ρίζες άνισες, από τις οποίες η μία είναι η $x=1$.

- i. Να βρείτε το λ .
- ii. Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης(1).

Άθροισμα και γινόμενο ριζών εξίσωσης 2^{ου} βαθμού-Τύποι Vieta

Έστω ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$, έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 . Αν συμβολίσουμε με $S = x_1 + x_2$ το άθροισμα των ριζών και με $P = x_1 x_2$ το γινόμενο των ριζών, τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Οι παραπάνω τύποι είναι γνωστοί και ως τύποι Vieta.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

Η εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 , με $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 x_2$ είναι η:

$$x^2 - S \cdot x + P = 0$$

Άσκηση 13

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 3x - 5 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 πραγματικές και άνισες.

β) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

- i. $x_1 + x_2$
- ii. $x_1 x_2$
- iii. $x_1^2 + x_2^2$
- iv. $x_1^3 + x_2^3$
- v. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
- vi. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

Άσκηση 14

Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού, η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς:

α) $x_1 = -2$ και $x_2 = 5$

β) $x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ και $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

Άσκηση 15

Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 5 = 0$. Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς:

- i. $2x_1$ και $2x_2$
- ii. $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$

Άσκηση 16

Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + (\lambda + 2)x + \lambda - 1 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

β) Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει

- i. ρίζες αντίθετες,
- ii. ρίζες αντίστροφες

Άσκηση 17

Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , η εξίσωση

$$x^2 + 4x + \lambda - 6 = 0$$

έχει:

- i. ρίζες ομόσημες,
- ii. ρίζες ετερόσημες.

Άσκηση 18

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (\lambda - 4)x - \lambda + 2 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η εξίσωση (1) έχει:

- i. θετικές ρίζες,
- ii. αρνητικές ρίζες.

Άσκηση 19

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + 3\lambda + 6 = 0$ (1). Να βρείτε για ποια τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 , για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 20

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - (\lambda + 3)x + 3\lambda - 2 = 0 \quad (1)$$

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή του λ .
- ii. Αν x_1 και x_2 , είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 + x_1 x_2 = (x_1 - x_2)^2$$

Άσκηση 21

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 4(\lambda + 1)x + 8\lambda - 1 = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

β) Έστω x_1 και x_2 , οι ρίζες της εξίσωσης (1),

i. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = (x_1 - 2)(x_2 - 2)$$

είναι ανεξάρτητη του λ .

ii. Να βρείτε το λ , ώστε να ισχύει:

$$x_1^2 x_2 + x_1 + x_1 x_2^2 + x_2 = 64$$

Άσκηση 22

Έστω x_1 και x_2 , οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

i. Να βρείτε τον αριθμό:

$$a = (1 + x_1)^{2011} \cdot (1 + x_2)^{2011}$$

ii. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = (ax_1 + 2)(ax_2 + 2)$$

iii. Να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{a}{x_1}$ και $\frac{a}{x_2}$

Άσκηση 23

Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $(x-1)^2 - 6\sqrt{x^2 - 2x + 1} + 8 = 0$

ii. $(|x|-3)^2 - 3\sqrt{x^2 - 6|x| + 9} - 4 = 0$

Άσκηση 24

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i.} \quad \left(\frac{x}{x-4}\right)^2 - \frac{x}{x-4} - 2 = 0$$

$$\text{ii.} \quad \left(\frac{2x}{x-3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{2x}{3-x} - 4 = 0$$

Άσκηση 25

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i.} \quad 6\left(\frac{2x}{x-3}\right)^2 - \frac{10x}{x-3} - 6 = 0$$

$$\text{ii.} \quad \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 + \frac{12-6x}{x+1} + 8 = 0$$

$$\text{iii.} \quad \left(\frac{3x}{x-1}\right)^2 + \frac{6x}{1-x} - 8 = 0$$

Άσκηση 26

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i.} \quad \left(3x + \frac{2}{x}\right)^2 - 12\left(3x + \frac{2}{x}\right) + 35 = 0$$

$$\text{ii.} \quad \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 + \frac{7x+14}{2x-4} + 3 = 0$$

Άσκηση 27

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i.} \quad \frac{1}{3x^2-2x} + 3x^2 - 2x = 2$$

$$\text{ii.} \quad \frac{8}{x^2+4x} - x^2 - 4x = 2$$

$$\text{iii.} \quad \frac{x^2-3}{2x} + \frac{2x}{x^2-3} = 2$$

Άσκηση 28

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $|x^2 - x| + |x^2 - 11x + 10| = 0$
- ii. $|x^2 + 3x| + |x^4 - 8x^2 - 9| = 0$

Άσκηση 29

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- i. $(x^2 - 5x + 3)^2 + 4(x^2 - 5x) + 15 = 0$
- ii. $(x^2 + 2x + 2)^2 + x^2 + 2x = 0$

Άσκηση 30

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a , να λύσετε την εξίσωση:

$$x^4 - (a+1)x^2 + a = 0$$

Άσκηση 31

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 7 = 0 \tag{1}$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή του λ .

β) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -2$$

- i. Να βρείτε το λ .

- ii. Να σχηματίσετε εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{x_1^2}{x_2}$ και $\frac{x_2^2}{x_1}$.

Άσκηση 32

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$ (1).

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
β) Να βρείτε το λ , ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης (1) να είναι ίση με το τετράγωνο της άλλης.
γ) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε.

- i. Να υπολογίσετε την επόμενη παράσταση:

$$A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1}$$

- ii. Να βρείτε εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1 - 1}$ και $\frac{1}{x_2 - 1}$.