

Ασκήσεις Κεφάλαιο 2

1. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left[(x^{-1} \cdot y)^{-3} \cdot (x^5 \cdot y^4)^2 \right] : \left(\frac{x}{y^3} \right)^2$$

για $x=2011$ και $y = \frac{1}{2011}$.

2.

i. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\alpha^2 - (\alpha - 2)(\alpha + 2) = 4$$

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 3,12345^2 - 1,12345 \cdot 5,12345$$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $A = \frac{x^3 + 2x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$

ii. $B = \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \cdot \frac{x^3 + x^2}{(x+1)^3}$

iii. $\Gamma = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^4 + 2x^3}{x^2 - 2x}$

iv. $\Delta = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} : \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^{-3}$

v. $E = \left(\frac{\alpha^3 + 125}{10\alpha - 2} \cdot \frac{1 - 25\alpha^2}{\alpha^3 - 5\alpha^2 + 25\alpha} \right) : \frac{3\alpha + 15}{4}$

vi. $Z = \frac{x-2}{8x^3 - 27} : \frac{ax - 2a + \beta x - 2\beta}{3 - 2x}$

4. Να αποδείξετε ότι:

i. $x^2 + 1 \geq 2x$

ii. $x^2 \geq 3(2x - 3)$

iii. $x(x+6) \geq 2(x-2)$

iv. $-x(x-2) \leq 2(5x+8)$

5.

Αν ισχύει $1 \leq \alpha \leq 3$ και $-4 \leq \beta \leq -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι τιμές των επόμενων παραστάσεων:

- i. $2\alpha + 3\beta$
- ii. $\alpha - \beta$
- iii. $\alpha^2 + \beta^2$
- iv. $\frac{\alpha}{\beta}$

6. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει:

- i. $\alpha^2 + \beta^2 + 20 \leq 4(2\beta - \alpha)$
- ii. $(\alpha + 1)^2 + \beta^2 \leq 4\alpha - 3(2\beta + 3)$
- iii. $2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \leq 2\alpha(3 - \beta)$

7. Αν $x \in (2, 3)$ και $y \in (6, 8)$, να γράψετε σε μορφή διαστήματος τα σύνολα στα οποία ανήκουν οι αριθμοί:

- i. $\alpha = y - x$
- ii. $\beta = 5x - 2y$
- iii. $\gamma = x^2 - 3y$
- iv. $\delta = \frac{y}{x} - 1$

8.

i. Αν $\alpha > 2$, να αποδείξετε ότι:

$$3(\alpha - 3) > \alpha - 5$$

ii. Αν $a < -3$, να αποδείξετε ότι:

$$6(a + 1) < -3(1 - a)$$

9. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = |x^2 - 4x + 4|$$

$$B = |-x^2 + 2x - 1|$$

$$\Gamma = |x^2 + 16 - 8x|$$

10. Αν $x < 3$, να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

i. $A = |x - 3|$

ii. $B = 5 - |x - 3|$

iii. $\Gamma = x - |3 - x|$

11. Να βρείτε σε ποιο σύνολο ανήκουν οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει:

i. $|x - 4| < 6$

ii. $|x + 3| < 7$

iii. $|x - 2| > 4$

iv. $|x + 1| > 2$

v. $|x - 5| \leq 3$

vi. $|x - 6| \geq 5$

12. Αν ισχύει $-2 < x < 3$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = |5 - |x - 3||$$

$$B = ||x + 2| - 5 - |2x - 6||$$

13. Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x + 2| + |3 - x| - 2|x|$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του x .

14. Αν ισχύει ότι $d(2\alpha, 9\beta) = d(\alpha, 0)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 9\beta$ ή $\alpha = 3\beta$.

15. Αν $\alpha < 1 < \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = d(1, \alpha) + d(1, \beta) - d(\alpha, \beta)$$

16. Να αποδείξετε ότι:

- i. $\sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3}$
- ii. $2\sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{245} = 3\sqrt{5}$
- iii. $3\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{50} = 10\sqrt{2}$
- iv. $3\sqrt{32} - \sqrt{128} + \sqrt{18} = 7\sqrt{2}$

17. Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

- i. $A = \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}$
- ii. $B = \sqrt[3]{2\sqrt{8}\sqrt{4}}$
- iii. $\Gamma = \sqrt[3]{35 - 2\sqrt{11 + \sqrt{25}}}$
- iv. $\Delta = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(\sqrt{27} - \sqrt{12})\sqrt{3}}$

18. Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

- i. $A = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}$
- ii. $B = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{7})^2}$
- iii. $\Gamma = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2}$
- iv. $\Delta = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$
- v. $E = \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2}$

19. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \sqrt{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 1}$$

$$B = \sqrt[3]{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{15}}$$

$$\Gamma = \sqrt{(\sqrt{10} + 1)^2 - \sqrt{160}} \cdot (\sqrt{10} + 1)$$

$$\Delta = \sqrt[3]{(4 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{7})} \cdot \sqrt[3]{3}$$

20.

- i. Αν ισχύει $0 < x < 1$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

- ii. Αν ισχύει $2 < y < 3$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$B = \sqrt{y^2 - 4y + 4} + \sqrt{y^2 - 6y + 9}$$

21. Αν ισχύει $-1 < x < 3$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x + 1} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x + 3}$$

22. Αν ισχύει $|x| \leq 2$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4}$$

23. Να μετατρέψετε τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

i. $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

ii. $\frac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$

iii. $\frac{2}{\sqrt{7} - 1}$

iv. $\frac{11}{5 - \sqrt{3}}$

$$\text{v. } \frac{1}{3\sqrt{2}+2}$$

$$\text{vi. } \frac{6}{4\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$$

24. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i. } A = \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

$$\text{ii. } B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

25. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i. } 25^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ii. } 16^{\frac{3}{4}}$$

$$\text{iii. } 27^{\frac{5}{12}} \cdot 27^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{iv. } \frac{9^{\frac{3}{4}} \cdot 9^{\frac{5}{2}}}{9^{\frac{7}{4}}}$$