Τράπεζα Θεμάτων – Γεωμετρική πρόοδος (1)

1. 12787 – Θέμα 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ ώστε οι αριθμοί $\kappa - 2, \kappa, 2\kappa + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

(Μονάδες 15)

2. 1360 – Θέμα 2

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3=1$ *και* $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_\nu=2^{\nu-3}.$$ (Μονάδες 12)

3. 1339 – Θέμα 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{a_5}{a_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (Μονάδες 15)

4. 1321 – Θέμα 2

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

5. 1311 – Θέμα 2

Οι αριθμοί $κ-2$, $2κ$ και $7κ+4$, $κ \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου $(α_ν)$.

α) Να αποδείξετε ότι $κ=4$ και να βρείτε το λόγο $λ$ της προόδου. (Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το $2^ο$ όρο, τον $5^ο$ και τον $4^ο$ όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του $α_1$. (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $α_2 + α_5 = 4(α_1 + α_4)$. (Μονάδες 7)

6. 1257 – Θέμα 2

α) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

7. 1242 – Θέμα 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x, $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο $λ$ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x=1$

ii) $x=-1$

(Μονάδες 12)

8. 1498 – Θέμα 4

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών $α$, $β$ και εμβαδόν $Ε$, τέτοια ώστε οι αριθμοί $α$, $Ε$, $β$, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι $Ε=1$ (Μονάδες 10)

β) Αν $α + β = 10$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τα μήκη $α$, $β$ (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη $α$, $β$ (Μονάδες 10)

9. 33891 – Θέμα 4

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν:

$\alpha_3 = 4,\ \alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$, $\nu = 1,2,3,\ldots$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

(Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_ν) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_ν) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}.$$

(Μονάδες 8)

10. 12998 – Θέμα 4

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

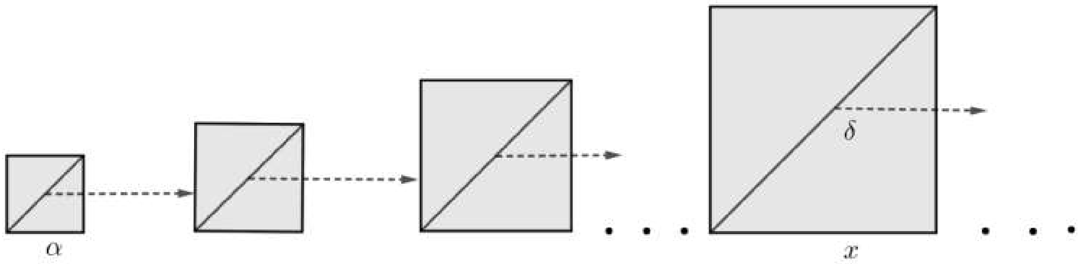
(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_ν) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

(Μονάδες 8)

11. 14645 – Θέμα 4

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α)

i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_\nu = \alpha^2 2^{\nu-1}$.

(Μονάδες 7)

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με $8\ \tau.\mu.$, να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

(Μονάδες 8)

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν $255\ \tau.\mu.$

(Μονάδες 6)

12. 12731 – Θέμα 4

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ, $\kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, $\kappa \cdot \lambda$,(κ>0, $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$ να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ, $\kappa \cdot \lambda$.

(Μονάδες 7)

13. 1499 – Θέμα 4

Δίνονται οι αριθμοί $2, x, 8$ με $x > 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2, x, 8,$ με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, … και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, … τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν). (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2(S_\nu + 24) = \beta_7$ (Μονάδες 8)

14. 1394 – Θέμα 4

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της. (Μονάδες 6)

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν. (Μονάδες 6)

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 7)

15. 1435 – Θέμα 4

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα *Α* πρέπει να καταθέσει τον *1*^{o} μήνα *1 ευρώ*, το *2*^{o} μήνα *2 ευρώ*, τον *3*^{o} μήνα *4 ευρώ* και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα *Β* πρέπει να καταθέσει τον *1*^{o} μήνα *100 ευρώ*, το *2*^{o} μήνα *110 ευρώ*, τον 3^{o} μήνα *120 ευρώ* και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά *10 ευρώ* μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^{o} μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν^{o} μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από *ν* μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Β*. (Μονάδες 5)

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους *6* μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε *12* μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

16. 1392 – Θέμα 4

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (*τ.μ*), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 *τ.μ*, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 *τ.μ.* και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα. (Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768*τ.μ.*;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 *τ.μ.* και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 *τ.μ.* την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 *τ.μ.* (Μονάδες 9)