

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΡΓΑΣΙΑ ΠΑΣΧΑ
ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 8)

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.
(Μονάδες 8)

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$.

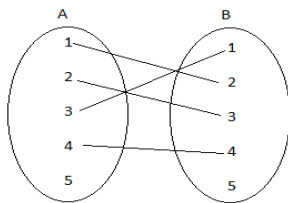
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

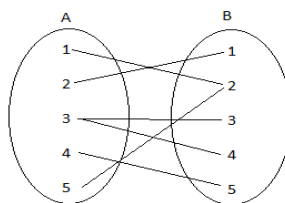
β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$, είναι αυτό δυνατό.

(Μονάδες 12)

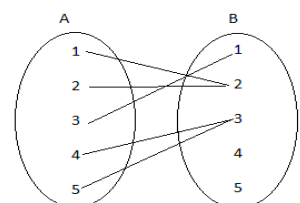
4. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B.

(Μονάδες 9)

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

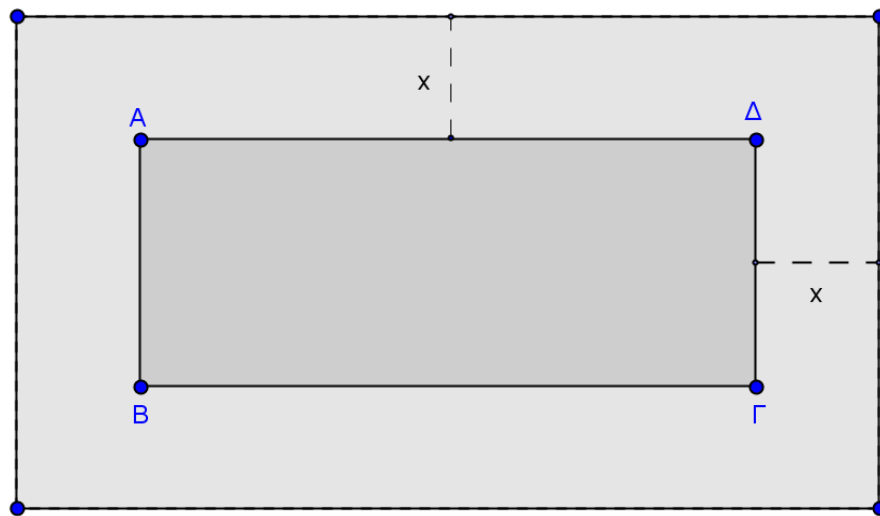
ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

iii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.

(Μονάδες 8)

5. Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις $15m$ και $25m$. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος $x\ m$ ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:
 $E(x) = 4x^2 + 80x, x > 0$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500 \text{ m}^2$.

(Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2 ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

6. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της παραπάνω συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 8)

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|κ| x - 2$ και η ευθεία $ε: y = 2x - κ^2, κ \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $κ \in \mathbb{R}$.
(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου $κ$.
(Μονάδες 8)

γ) Για $κ = -3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 5)

δ) Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ).
(Μονάδες 7)

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .
(Μονάδες 6)

α) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$.
(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.
(Μονάδες 6)

δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
(Μονάδες 8)

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$
(Μονάδες 10)

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$.
(Μονάδες 15)