

Η έννοια της συνάρτησης – Τράπεζα θεμάτων

1. 37202 – Θέμα 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

(Μονάδες 8)

2. 37189 – Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

(Μονάδες 15)

3. 37185 – Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι $f(x) = x^2 + 4x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

(Μονάδες 10)

4. 37175 – Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8 - x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

(Μονάδες 12)

5. 14728 – Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

(Μονάδες 13)

6. 36680 – Θέμα 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \text{ και } g(x) = \alpha x - 5, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α .

(Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

(Μονάδες 5 + 5 = 10)

7. 36679 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = |x| - 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.

(Μονάδες 10)

8. 36654 – Θέμα 4

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν πάνω σε μπλουζάκια και ίδρυσαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώληση τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).

(Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

9. 14655 – Θέμα 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($A = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε $x+y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2)$ με $x \in (0,10)$.

(Μονάδες 8)

β) i. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,10)$.

(Μονάδες 7)

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

(Μονάδες 6)

γ) Αν $x=5$, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του;

(Μονάδες 4)

10. 34317 – Θέμα 4

Το ποσό που θα πληρώσει (σε ευρώ) ένας κάτοικος μιας πόλης A ο οποίος καταναλώνει x κυβικά μέτρα νερού σε ένα χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x+12, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x+6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}.$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει κάποιος αν:

i. έλλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει καθόλου νερό,

(Μονάδες 2)

ii. έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού,

(Μονάδες 3)

iii. έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη B , το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x) = 12 + 0,6x, \text{ για } x \geq 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B , να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 15)

11. 14702 – Θέμα 4

Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας σε συνάρτηση του x .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περιφράξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

(Μονάδες 10)