

2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

Ιδιότητες των δυνάμεων

$$\begin{aligned} \bullet \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} &= \alpha^{\kappa+\lambda} & \bullet \alpha^{\kappa} : \alpha^{\lambda} &= \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda} \\ \bullet \alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} &= (\alpha \cdot \beta)^{\kappa} & \bullet \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa} \\ \bullet (\alpha^{\kappa})^{\lambda} &= \alpha^{\kappa \cdot \lambda} \end{aligned}$$

Αξιοσημειώτες ταυτότητες

$$\begin{aligned} \bullet (\alpha + \beta)^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 & \bullet (\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \\ \bullet (\alpha + \beta)^3 &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 & \bullet (\alpha - \beta)^3 &= \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 \\ \bullet \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) & \bullet \alpha^3 - \beta^3 &= (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \\ \bullet (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) &= \alpha^2 - \beta^2 & \bullet (x + \alpha)(x + \beta) &= x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \end{aligned}$$

ΛΥΜΕΝΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν $x = 4$ και $y = 8$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{(x^{-2}y)^{-4}}{(xy^2)^3 : (xy^4)}$.

Λύση

Αρχικά απλοποιούμε την παράσταση:

$$A = \frac{(x^{-2}y)^{-4}}{(xy^2)^3 : (xy^4)} = \frac{(x^{-2}y)^{-4}}{\frac{(xy^2)^3}{(xy^4)}} = \frac{x^8y^{-4}}{\frac{x^3y^6}{xy^8}} = \frac{x^8y^{-4}}{x^2y^{-2}} = x^6y^{-2}$$

Στη συνέχεια θέτουμε όπου $x = 4$ και $y = 8$:

$$A = x^6y^{-2} = 4^6 \cdot 8^{-2} = (2^2)^6 \cdot (2^3)^{-2} = 2^{12} \cdot 2^{-6} = 2^6 = 64$$

Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = -\frac{1}{4} + \frac{2 : \frac{1}{2} - 4 + \frac{2 + \frac{1}{4}}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{3 - \frac{5}{3}}}$.
2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = 2(2x + y - 3xy) - 3[x + y - 2(xy + 1)]$, όταν $x = -2,33$ και $y = 3,67$.
3. Αν ισχύει $y - 2x = 5$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:
 $A = 10(x - y) - 2(3x - 4y) + 5$
4. Αν οι αριθμοί $x = \alpha - 4\beta + 5\gamma$ και $y = 2\beta - \alpha - 3\gamma$ είναι αντίθετοι, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$.
5. Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:
 $A = 2[3 - (\alpha - 2\beta)] - (\beta - 5\alpha)$
6. Αν οι αριθμοί x και y είναι αντίθετοι και οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:
 $A = -2(x - y + \alpha) + \alpha(\beta + 2) - 4(x + 2y)$
7. Αν ισχύει $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, με $y \neq 0$, να βρείτε την τιμή των κλασμάτων:
 $\alpha) A = \frac{6x - 5y}{y} \qquad \beta) B = \frac{2x + 3y}{2x - y}$
8. Αν ισχύει $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{7}$ και $3\alpha - 2\beta + \gamma = 10$, να βρείτε τις τιμές των α , β και γ .
9. Αν οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3, 4, να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

10. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 9 \cdot 27^{-1} \cdot (3^2)^4 : \left(\frac{1}{3^{-2}} : \frac{1}{81}\right)$.
11. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{12^{80} \cdot 6^{-78}}{8^{27}}$.
12. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \left[x^3 y (x^{-2})^{-2}\right] : (y^2)^{-3}$ για $x = \frac{1}{5}$ και $y = 5$.
13. Αν $\alpha = -3$ και $\beta \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (\alpha^2 : \beta^3)^{-5} (\alpha^{-4} : \beta^{-5})^{-3}$$
14. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (x^{-1} y^4)^{-2} \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{-3} \left(-\frac{y^3}{x^2}\right)^4$ για $x = 4$ και $y = 8$.
15. Να αποδείξετε ότι:
- α) $(x+3)^2 - (x+4)(x-4) - 3(4x+1) = 22 - 6x$
 - β) $(x-3)^3 + 9(x-2)^2 + 9(x-1) = x^3$
 - γ) $(x+2)^3 - 6(x+1)^2 = x^3 + 2$
 - δ) $(1-x)^3 + 2 - 3x = 3(x-1)^2 - x^3$
 - ε) $[(x-1)(x+1)]^2 - (x^2 - x)(x^2 + x) + (x+1)(x-1) = 0$
 - στ) $[(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)]^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$
 - ζ) $(\alpha^2 - 2\alpha + 1)^2 + (\alpha^2 + 2\alpha - 1)^2 = 2(\alpha^2 + 1)^2 + 4\alpha(\alpha - 2)$
 - η) $(2x - y)^3 + 3(2x - y)^2(y - x) + 3(2x - y)(y - x)^2 + (y - x)^3 = x^3$
16. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) + y^4$, αν $x = -2$.
17. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x + 1)^3 + 3x(x + 1)$ είναι ανεξάρτητη του x .

18. α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999} \right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999} \right)^2$$

19. Αν ισχύει $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$

β) $B = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$

γ) $B = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$

20. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $12x^2y + 6xy^2 - 9xy$

β) $4x^2 - 9y^4$

γ) $2x^3 - 6x^2 - 8x + 24$

δ) $25x^2 - 20xy + 4y^2$

ε) $x^3 + 2x^2 + x$

στ) $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\beta$

21. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα:

α) $x^2 - 6x + 8$

β) $x^2 + 6x + 5$

γ) $x^2 - 2x - 3$

δ) $x^2 + 3x - 4$

22. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να τις απλοποιήσετε:

α) $\frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

β) $\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - x}$

γ) $\frac{(x^2 - x) + 2x - 2}{x^2 - 1}$

δ) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x - 2}$

ε) $\left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \cdot \frac{x^3 + x^2}{(x + 1)^3}$

στ) $\frac{x(x - 2) + 1}{(x - 2)(x - 1)}$

23. Αν ισχύει $\alpha(\beta^2 + 1) = \beta(\alpha^2 + 1)$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ίσοι ή αντίστροφοι.

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $4x^3 - 9x + (6 - 2x^2)(2x - 3) = 0$

β) $(x - 1)^3 + 1 = x^2$

γ) $(x - 1)^3 + (x - 2)^3 + (3 - 2x)^3 = 0$

δ) $(x - 2)^3 + (3x - 1)^3 - (4x - 3)^3 = 0$

Τράπεζα θεμάτων

1. (14555)

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

2. (14473)

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$.

α) Να δείξετε ότι $y = 2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y = 2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

3. (14458)

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x + 4y)(x + y) = 9xy.$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y - x)^2 = 0$

(Μονάδες 8)

ii. $y = \frac{x}{2}.$

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2.$

(Μονάδες 12)

4. (13088)

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

5. (13472)

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha^2 = 2\alpha + \beta \text{ και } \beta^2 = 2\beta + \alpha.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta.$

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1.$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2.$

(Μονάδες 9)

6. (13053)

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta + \gamma = -\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$.

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0.$$

(Μονάδες 13)

7. (12685)

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4, \text{ τότε να αποδείξετε ότι:}$$

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha = \beta$.

(Μονάδες 13)

8. (1251)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$$

(Μονάδες 15)

9. (14489)

ΘΕΜΑ 2

Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

(Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 15)

10. (14329)

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{-\alpha}{\beta}$, $B = \alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 15)