

Τράπεζα Θεμάτων – 2.4 Εμβαδόν τριγώνου

1. Θέμα 2 – 21260

Δίνεται η ευθεία (ϵ): $y - 2x = 0$ και τα σημεία $B(1,1)$ και $\Gamma(-1,3)$.

α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(5,10)$ ανήκει στην ευθεία (ϵ).

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)

2. Θέμα 2 – 20926

Δίνεται η ευθεία ϵ : $x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ϵ ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της ϵ .

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ϵ .

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ϵ είναι το B .

(Μονάδες 09)

3. Θέμα 2 – 18979

Δίνονται οι ευθείες ϵ_1 : $2x + 3y = 5$ και ϵ_2 : $4x + 6y = 8$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας ϵ_1 .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ϵ_2 .

(Μονάδες 10)

4. Θέμα 2 – 18240

Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$.

α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε) .

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες $(\eta), (\varepsilon)$.

(Μονάδες 10)

5. Θέμα 2 – 20864

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + y + 2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 .

(Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 .

(Μονάδες 8)

6. Θέμα 2 – 15440

Δίνονται τα σημεία $A(0,2), B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ ορίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

7. Θέμα 2 - 16771

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $\Gamma(4,-1)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$.

α) Να βρεθεί το σημείο B .

(Μονάδες 09)

β) Αν $B(5,0)$:

i. Να δείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 08)

8. Θέμα 4 – 16057

Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(3,4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ .

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A , έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B , έχει εξίσωση (ε) : $15x - 8y - 30 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ) , εκτός από την (ε) , η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ) .

(Μονάδες 7)

9. Θέμα 4 – 15681

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B(\frac{\alpha}{2},\beta)$ και $M(\frac{\alpha}{2},0)$, όπου α,β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι $OB:2\beta x - \alpha y = 0$ και $AB:2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$.

(Μονάδες 8)

δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

(Μονάδες 3)

10. Θέμα 4 – 15380

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 4$

i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 9)

11. Θέμα 4 -15443

Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1, -2)$ και $B(3, 1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $\delta: x + y - 1 = 0$.

α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ :

i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.

(Μονάδες 8)

ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι ίσο με 8.

(Μονάδες 10)

12. Θέμα 4 – 22266

Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0$ (Ε) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (Ζ) με εξίσωση: $6x - 8y + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (Ε) να είναι παράλληλη στη ευθεία (Ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε); (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(1, 3)$ από την ευθεία (Ζ). (Μονάδες 5)

13. Θέμα 4 – 22265

Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(\mu-1, 3\mu-2)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία

$$\varepsilon: y = 3x + 1. \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, τα σημεία A , B , Γ είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό. (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο B και από τις οποίες το σημείο A , απέχει απόσταση ίση με 1. (Μονάδες 8)

14. Θέμα 4 – 22262

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(5, -1)$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή A . Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας $B\Gamma$, από το οποίο, το A απέχει την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$(MAB) = \frac{1}{2} (AB\Gamma). \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

15. Θέμα 4 – 20861

Δίνεται το σημείο $M(-2, 2)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο M .

(Μονάδες 06)

β)

i. Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy .

(Μονάδες 04)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1), η οποία διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy τρίγωνο, με εμβαδόν $E = 8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν (ε_1): $y = x + 4$, να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η (ε_1) με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή O .

(Μονάδες 05)

16. Θέμα 4 – 15692

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + y = x + 2xy + 6$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(x - y)^2 - (x - y) - 6 = 0$.

(Μονάδες 4)

ii. Η εξίσωση παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, τις οποίες να βρείτε.

(Μονάδες 4)

Έστω $\varepsilon_1 : x - y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y + 2 = 0$ οι δυο παράλληλες ευθείες.

β) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M\left(\alpha, \alpha - \frac{1}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ισαπέχουν από τις δυο ευθείες.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δυο ευθειών.

(Μονάδες 7)

17. 20728 – Θέμα 4

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια με τον άξονα x' .

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου $O(0,0), A(3,\sqrt{3}), B(3,3)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι $\eta \mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

(Μονάδες 7)

(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

18. Θέμα 4 – 20655

Δίνονται τα σημεία $A(2,1), B(3,-1)$ και $\Gamma(-2,0)$.

α)

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 07)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με $\frac{9}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 03)

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $\Delta(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(\Delta A\Gamma) = (AB\Gamma)$

(Μονάδες 07)

γ) Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ του ερωτήματος (β) αποτελείται από τις ευθείες $\varepsilon_1 : x - 4y - 7 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - 4y + 11 = 0$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A\Gamma, \varepsilon_1$ και ε_2 είναι παράλληλες.

(Μονάδες 03)

ii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x - 4y - 7 = 0$ και $x - 4y + 11 = 0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία $A\Gamma$ ».

(Μονάδες 05)

19. Θέμα 4 – 14984

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -3)$ και $B(7, 9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB) = 12$ τ.μ.

α) Να αποδείξετε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών

$$(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0 \text{ και } (\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0.$$

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2) .

(Μονάδες 9)

γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2 . Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2) , που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2 ; Εξηγήστε.

(Μονάδες 7)