

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Δίνονται δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τα οποία έχουν μέτρο 1 και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\frac{2\pi}{3}$. Θεωρούμε επίσης και τα διανύσματα $\vec{u} = 4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{1}{2}$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{u}| = 2\sqrt{3}$ και $|\vec{v}| = \sqrt{3}$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$. (Μονάδες 7)

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\beta}| = 3$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$ και $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (6\vec{\alpha} + 5\vec{\beta})$.

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 4)

γ) Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$. Να βρείτε:

i) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$, (Μονάδες 7)

ii) τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$. (Μονάδες 7)

3. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(-1, 2)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(4, 1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου που άγεται από την κορυφή B.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΓ. (Μονάδες 7)

γ) Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, όπου Α, Β και Γ τα παραπάνω σημεία.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ. (Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

4. Δίνεται η εξίσωση $(\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (1).

α)

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 02)

β)

i. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 03)

ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ , προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 09)

5. Δίνεται ο κύκλος C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $M(2, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = \sqrt{5}$ και να γράψετε την εξίσωση του κύκλου.

(Μονάδες 5)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του M .

(Μονάδες 6)

γ) i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $A(1, 3)$.

(Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες που βρήκατε στο ερώτημα γ) ii) είναι μεταξύ τους κάθετες.

(Μονάδες 6)

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda - 2)y - 4 - 3\lambda = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Έστω ότι το κέντρο K του κύκλου C που παριστάνει η εξίσωση (1) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 3x + y - 9 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -4$.

(Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .

(Μονάδες 5)

iii) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1, 5)$ ανήκει στον κύκλο C και να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\overrightarrow{KA}$.

(Μονάδες 8)

Προτεινόμενη Θεωρία

Από το σχολικό βιβλίο:

σελ. 21 Ορισμός πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα

σελ. 25 Απόδειξη: Διανυσματική ακτίνα μέσου

σελ. 33 Απόδειξη: Συντεταγμένες μέσου τμήματος

σελ. 33 Απόδειξη: Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα

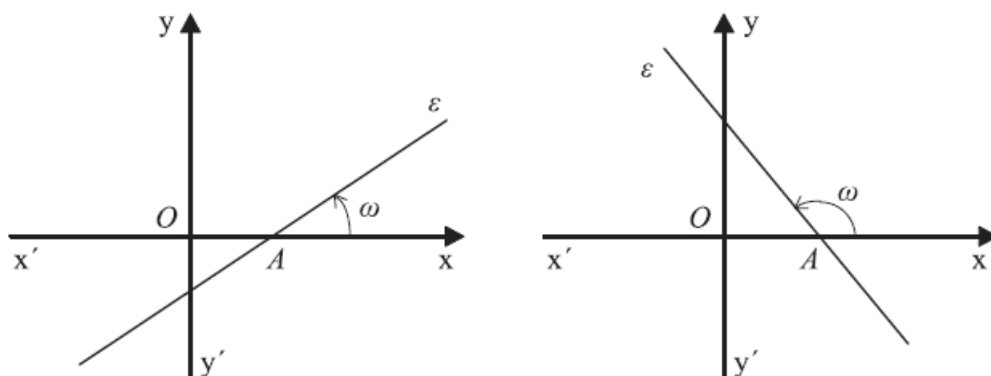
σελ. 41 Ορισμός: Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

σελ. 58 Ορισμός: Γωνία ευθείας με τον $x'x$ και συντελεστής διεύθυνσης
(τα υπογραμμισμένα και τα σχήματα, δείτε στην επόμενη σελίδα)

σελ. 83 Απόδειξη: Εφαπτομένη κύκλου

Απόσπασμα από τη σελ. 58 του σχολικού βιβλίου

- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A .



Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$** . Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία $\omega = 0$. Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$ ή σε ακτίνια $0 \leq \omega < \pi$. Ως **συντελεστή διεύθυνσης** ή ως **κλίση** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$. Προφανώς ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι θετικός, αν η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία και αρνητικός, αν είναι αμβλεία. Αν η ευθεία σχηματίζει με τον $x'x$ μηδενική γωνία, δηλαδή είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με μηδέν. Στην περίπτωση που η γωνία της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι 90° , δηλαδή η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ευθεία αυτή.