

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται:

- α) συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της,
- β) συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της,
- γ) συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της.

(Μονάδες 9)

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

(Μονάδες 6)

A3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 3$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 3$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -3$.

β) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$.

γ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.

δ) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

ε) Αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = f(1)$.

(Μονάδες 10)

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^3 \eta \mu \left(\frac{1}{x} \right) + x, \quad \text{για κάθε } x \neq 0$$

B1. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

(Μονάδες 8)

B2. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(Μονάδες 9)

B3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(Μονάδες 8)

Θέμα Γ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - 2xf(x) = 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(2, -1)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(2024) \cdot x^3 + 5x^2 + 3x - 7)$.

(Μονάδες 5)

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot \eta\mu x)$.

(Μονάδες 6)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -x^3 - x + 3$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε μοναδικό σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(1, 2)$.

(Μονάδες 5)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

(Μονάδες 5)

Δ3. Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f^{-1}(x) + 5 = x \text{ έχει μία τουλάχιστον λύση στο } (3, 5).$$

(Μονάδες 7)

Δ4. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β η εξίσωση:

$$f(x)(x^7 + \alpha x^2 + \beta x + 1) = e^x$$

έχει τουλάχιστον μία αρνητική ρίζα.

(Μονάδες 8)