

Θεωρία Μαθηματικών Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

ΘΕΩΡΙΑ – ΟΡΙΣΜΟΙ – ΣΧΟΛΙΑ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

A. ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

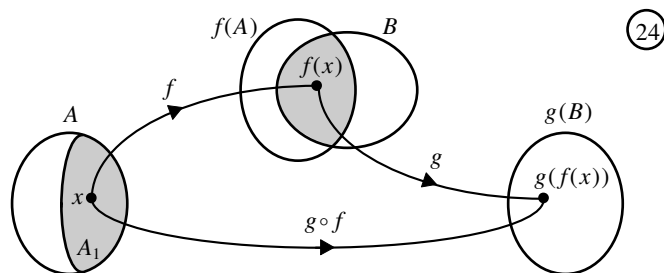
Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** , και τη συμβολίζουμε με **$g \circ f$** , τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3

Μια συνάρτηση f λέγεται :

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{για κάθε } x \in A$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{για κάθε } x \in A$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5α

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \quad \text{τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5β

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1-1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2), \quad \text{τότε } x_1 = x_2.$$

ΣΧΟΛΙΑ

- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν:

α) Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει

ακριβώς μια λύση ως προς x .

β) Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο

ΟΡΙΣΜΟΣ 6

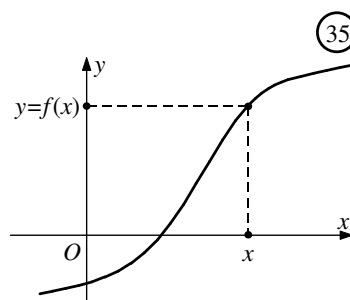
Αντίστροφη συνάρτηση

- Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

$$g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο

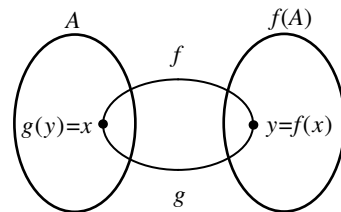


μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f . Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε



$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

οπότε

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A).$$

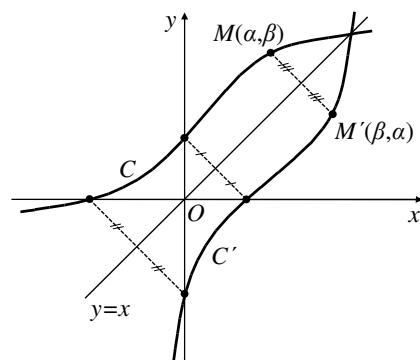
Ας πάρουμε τώρα μια 1-1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σ_χ). Επειδή

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x,$$

αν ένα σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, a)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Έτσι, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = a^x$ και $g(x) = \log_a x$, $0 < a \neq 1$, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.



B. ΟΡΙΑ

ΣΧΟΛΙΑ

— Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε “κοντά στο x_0 ”, δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής

$$(a, x_0) \cup (x_0, \beta) \quad \text{ή} \quad (a, x_0) \quad \text{ή} \quad (x_0, \beta).$$

— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σ' αυτό.

— Η τιμή της f στο x_0 , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριο της στο x_0 ή διαφορετική από αυτό.

ΣΥΜΒΑΣΗ

Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα P θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

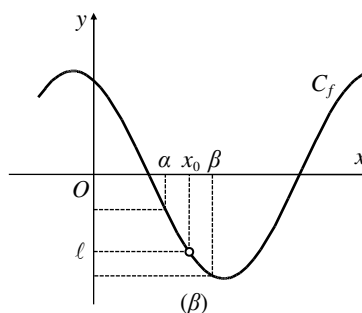
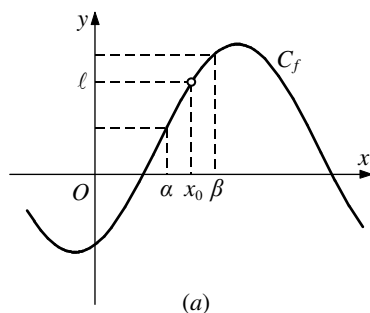
- α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P .
- β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0) , έχει σ' αυτό την ιδιότητα P , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β) .
- γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β) , έχει σ' αυτό την ιδιότητα P , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0) .

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

ΘΕΜΑ 1 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.)

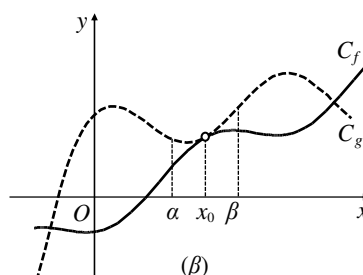
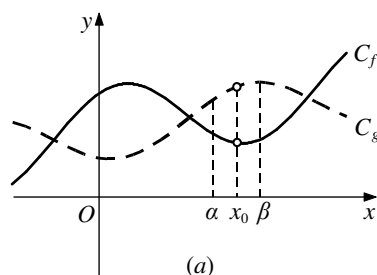
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48α)
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48β)



ΘΕΜΑ 2 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.)

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$



ΘΕΜΑ 3 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.)

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
6. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

ΘΕΜΑ 4: Έστω το πολυώνυμο

$$P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{και} \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + a_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = a_v x_0^v + a_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + a_0 = P(x_0). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

ΘΕΜΑ 5: Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x

και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως,

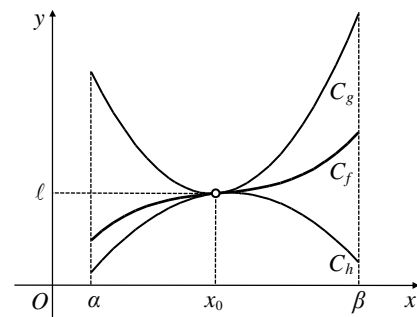
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \text{εφόσον } Q(x_0) \neq 0$$

ΘΕΜΑ 6 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.)(Κριτήριο παρεμβολής)

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$,
τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$



Παρατήρηση: (χρήσιμη ως μεθοδολογία για τις ασκήσεις)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0. \text{ Πράγματι, για } x \neq 0 \text{ έχουμε } \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|,$$

Οπότε $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο,

$$\text{έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Τριγωνομετρικά όρια (χ.α.)

$$|\eta \mu x| \leq |x|, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu x_0$$

$$\bullet \alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$$

$$\bullet \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 0$$

Όριο σύνθετης συνάρτησης (χ.α.)

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο

x_0 , εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$$

Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ (χ.α.)

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , ενώ

$$\text{αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \text{ τότε } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ

$$\text{αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty.$$

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ

$$\text{αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty, v \in \mathbb{N}^*$$

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}, v \in \mathbb{N}^*$.

ΘΕΜΑ 7α (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.) (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f + g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΜΑ 7β (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.) (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$,										
το όριο της f είναι:	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της fg είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \text{και} \quad 0 \cdot (\pm\infty).$$

Επειδή $f - g = f + (-g)$ και $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty) \quad \text{και} \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Όρια συνάρτησης στο άπειρο

Βασικά όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0, \quad v \in \mathbb{N}^*.$$

ΘΕΜΑ 8β (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.)

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$, με $a_v \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_v x^v) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_v x^v)$$

ΘΕΜΑ 8β (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.)

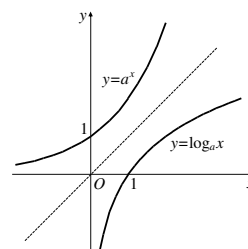
Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $a_v \neq 0$, $\beta_\kappa \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa} \right) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

ΘΕΜΑ 8γ (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.) (Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης)

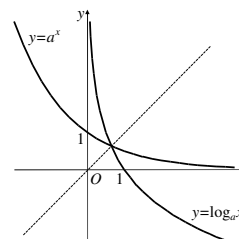
Αν $a > 1$ (Σχ), τότε

$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0,$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty,$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$



Αν $0 < a < 1$ (Σχ), τότε

$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty,$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty,$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$



Γ. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 7

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0** , όταν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

- α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή
- β) Υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0 .

ΘΕΜΑ 9 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.)

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f + g, \quad c \cdot f, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R}, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f| \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

ΘΕΜΑ 10 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.)

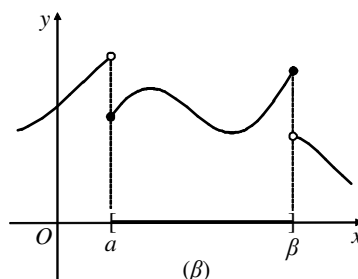
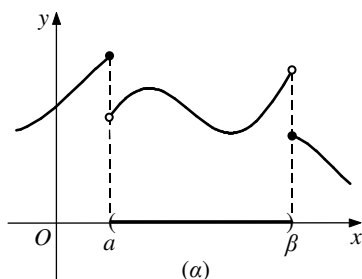
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα

ΟΡΙΣΜΟΣ 7

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β)** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) . (Σχ.α)
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta) \quad (\text{Σχ.β})$$



ΘΕΜΑ 11 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.) (Θεώρημα Bolzano)

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε

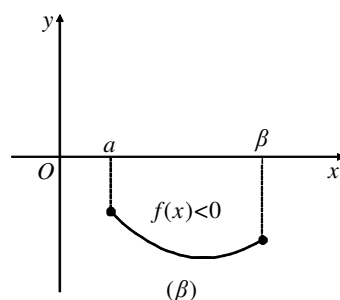
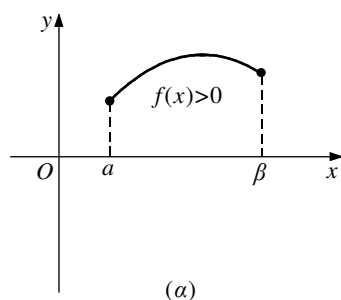
$$f(x_0) = 0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, β) .

ΣΧΟΛΙΑ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ . (Σχ.)



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ 12 (ΘΕΩΡΗΜΑ) (Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών)

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(α) < f(β)$. Τότε θα ισχύει $f(α) < \eta < f(β)$ (Σχ.). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [α, β]$, παρατηρούμε ότι:

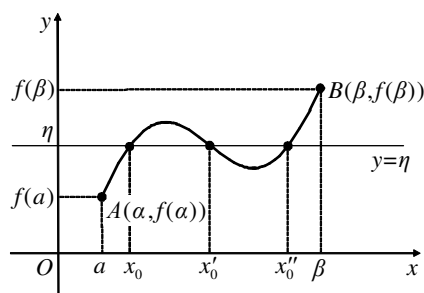
- η g είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $g(α)g(β) < 0$,

αφού

$$g(α) = f(α) - \eta < 0 \quad \text{και}$$

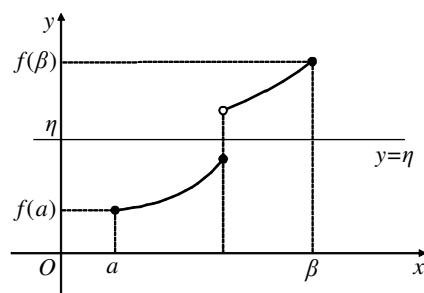
$$g(β) = f(β) - \eta > 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■



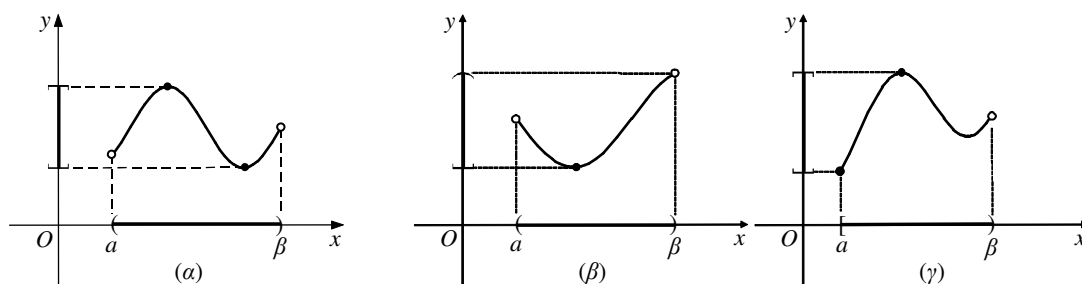
ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



- Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται ότι:

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



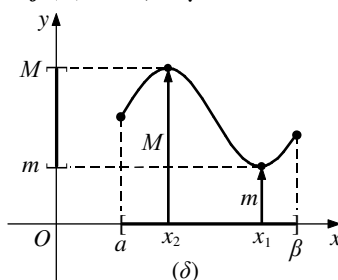
Στην ειδική περίπτωση που το Δ είναι ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΜΑ 13 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.) (Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής)

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m . (Σχ.)

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{για κάθε } x \in [a, \beta].$$



ΣΧΟΛΙΟ

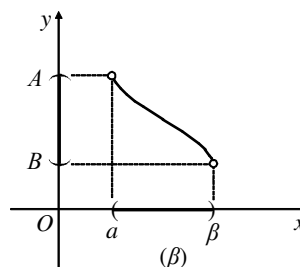
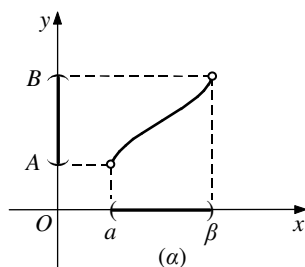
Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[a, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

ΘΕΜΑ 14:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) (Σχ.α), όπου

$$A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (a, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) (Σχ.β).



Δ. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 8

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0), \quad \text{όπου} \quad \lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 9

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν στην ισότητα $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx , ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Είναι φανερό ότι, αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f , τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{και είναι ίσα.}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

- Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή, είναι $v(t_0) = S'(t_0)$.

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 . Δηλαδή, είναι $\lambda = f'(x_0)$,

οπότε η εξίσωση της ε φαπτομένης ε είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο A ή κλίση της f στο x_0** .

ΘΕΜΑ 15 (ΘΕΩΡΗΜΑ) (Παράγωγος και Συνέχεια)

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$,

$$\text{Οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$$

$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 . ■

Παρατήρηση: Σύμφωνα Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΟΡΙΣΜΟΣ 10

- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.
- Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
- Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$$

- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(x),$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f** .

Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

ΘΕΜΑ 16: Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή

$$(c)' = 0$$

Απόδειξη:

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0. \text{ Επομένως, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0, \text{ δηλαδή } (c)' = 0. \quad \blacksquare$$

ΘΕΜΑ 17: Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή

$$(x)' = 1$$

Απόδειξη:

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1. \text{ Επομένως, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1, \text{ δηλαδή } (x)' = 1. \quad \blacksquare$$

ΘΕΜΑ 18: Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$, δηλαδή

$$(x^v)' = vx^{v-1}$$

Απόδειξη:

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1},$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1},$$

δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$. ■

ΘΕΜΑ 19: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Απόδειξη:

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{ δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(Όπως είδαμε προηγουμένως η $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.) ■

ΘΕΜΑ 20: Έστω συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$$

Απόδειξη:

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\eta\mu(x+h) - \eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h - \eta\mu x}{h} = \eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1 \text{ και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0,$$

$$\text{έχουμε } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή, $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$. ■

ΘΕΜΑ 21: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = -\eta\mu x$, δηλαδή

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

Απόδειξη:

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cdot \cos h - \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} = \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \cos x \cdot \frac{\sin h}{h},$$

$$\text{Οπότε } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) = \sin x \cdot 0 - \cos x \cdot 1 = -\sin x.$$

Δηλαδή, $(\sin x)' = -\cos x$. ■

ΣΧΟΛΙΟ

$$\text{Τα όρια } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0,$$

τα οποία χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε την παράγωγο των συναρτήσεων $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ είναι η παράγωγος στο $x_0 = 0$ των συναρτήσεων f, g αντιστοίχως, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = f'(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = g'(0).$$

Παρατήρηση: Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = e^x$, δηλαδή

$$(e^x)' = e^x$$

Παρατήρηση: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, δηλαδή

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

ΘΕΜΑ 22 (ΘΕΩΡΗΜΑ) (Παράγωγος Αθροίσματος)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. ■

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, \dots, f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο Δ , τότε

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x).$$

ΘΕΜΑ 23 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.) (Παράγωγος Γινομένου)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Παρατήρηση (χ.α.):

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Παρατήρηση (χ.α.):

Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, επειδή $(c)' = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε:

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

ΘΕΜΑ 24 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.) (Παράγωγος Πηλίκου)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

ΘΕΜΑ 25: Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -vx^{-v-1}$, δηλαδή

$$(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$$

Απόδειξη:

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε: $(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$. ■

Παρατήρηση:

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu > 1$. Επομένως, αν $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$, τότε

$$(x^\kappa)' = \kappa x^{\kappa-1}.$$

ΘΕΜΑ 26:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$

και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή

$$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Απόδειξη:

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση 16:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει

$$(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

ΘΕΜΑ 27 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.) (Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης)

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

ΘΕΜΑ 28:

Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (1)$$

Απόδειξη:

Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

ΘΕΜΑ 29:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$ δηλαδή

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$$

Απόδειξη:

Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha.$$

ΘΕΜΑ 30:

Η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

Απόδειξη:

Πράγματι

— αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x} \quad \text{και άρα } (\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 11

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής K , η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος στο x_0** . Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο x_0** και **οριακό κέρδος στο x_0** .

ΘΕΜΑ 30 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.) (Θ. Rolle)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

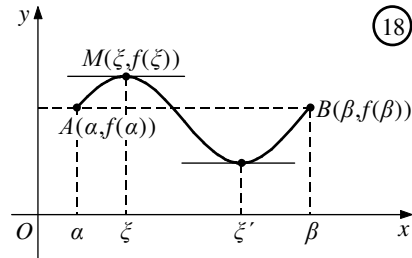
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$

- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .



ΘΕΜΑ 31 (ΘΕΩΡΗΜΑ)(χ.α.) (Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφ.Λογ.)

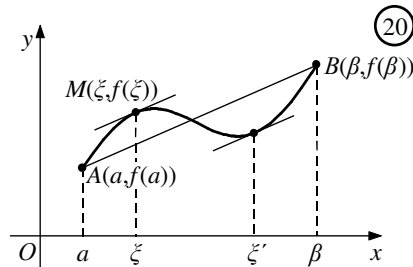
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α, β]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(α, β)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



Συνέπειες Θ.Μ.Τ.

ΘΕΜΑ 32 (ΘΕΩΡΗΜΑ)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

ΘΕΜΑ 33 (ΠΟΡΙΣΜΑ)

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

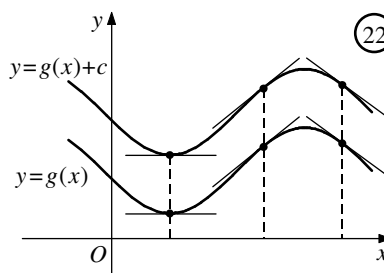
$$f(x) = g(x) + c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■



ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 34 (ΘΕΩΡΗΜΑ)

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

• Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ , η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ .

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12α

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f** .

ΟΡΙΣΜΟΣ 12β

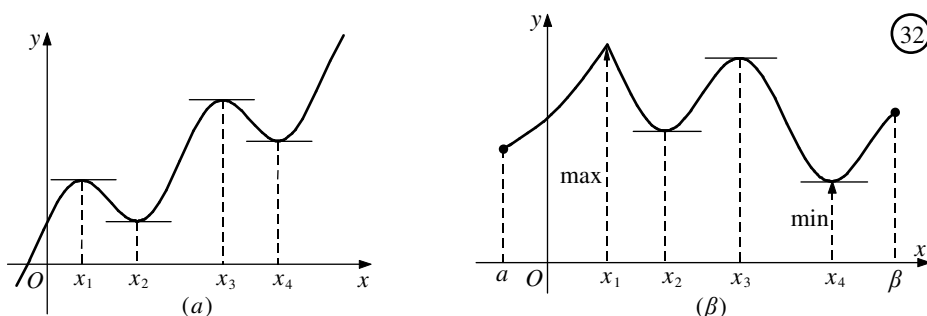
Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f** .

ΣΧΟΛΙΑ

i) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο



ii) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.

ΘΕΜΑ 35 (ΘΕΩΡΗΜΑ Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \quad \text{και}$$

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

ΣΧΟΛΙΟ

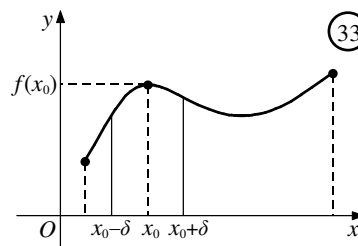
Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως, οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ .

ΘΕΜΑ 36 (ΘΕΩΡΗΜΑ)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

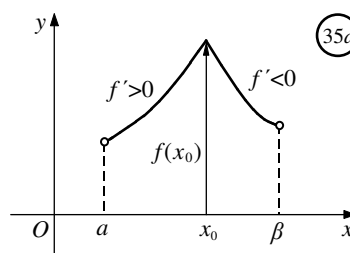
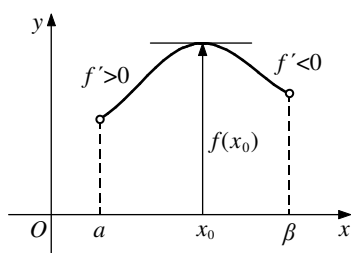


- i) Αν $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . (Σχ. 35α)
- ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . (Σχ. 35β)
- iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) . (Σχ. 35γ).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (a, x_0]$. (1)

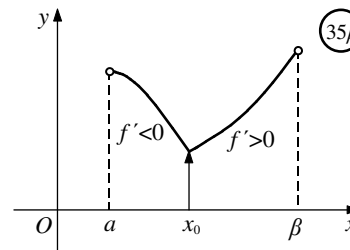
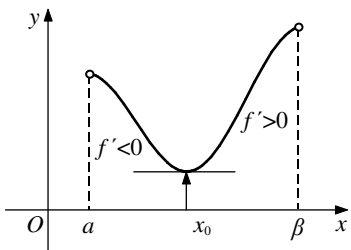
Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$. (2)



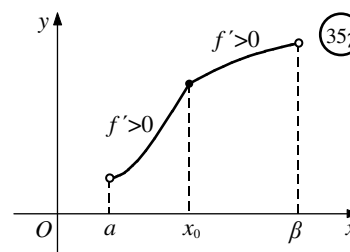
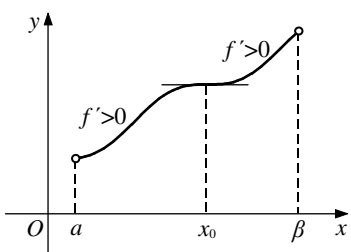
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (a, \beta)$,

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (a, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



iii) Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$.



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(a, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, όπως γνωρίζουμε η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f .
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.
3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f .

ΟΡΙΣΜΟΣ 13

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαιτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται “κάτω” (αντιστοίχως “πάνω”) από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ΘΕΜΑ 37 (ΘΕΩΡΗΜΑ) (χ.α.)

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42).

Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 14

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f .

ΘΕΜΑ 38 (ΘΕΩΡΗΜΑ) (χ.α.)

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

ΣΧΟΛΙΟ

Επομένως, οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και
- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

ΘΕΜΑ 39:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 15

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f .

ΟΡΙΣΜΟΣ 16

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

ΟΡΙΣΜΟΣ 17

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

Η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda = 0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη.

ΘΕΜΑ 40 (ΘΕΩΡΗΜΑ) (χ.α.)

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:

- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.
- 2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:
 - Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
 - Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
 - Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty, a)$.

Κανόνες de L' Hospital

ΘΕΜΑ 41 (ΘΕΩΡΗΜΑ) (χ.α.) (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΘΕΜΑ 42 (ΘΕΩΡΗΜΑ) (χ.α.) (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Μελέτη και χάραξη γραφικής παράστασης

1ο Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .

2ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

3ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f , ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

4ο Μελετούμε τη “συμπεριφορά” της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

5ο Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της f** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f . Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f .

ΣΧΟΛΙΑ

1) Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι $\acute{\alpha} \rho \iota \tau \iota$ α, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι $\pi \epsilon \rho \iota \tau \acute{\eta}$, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O . Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι $\pi \epsilon \rho \iota \omicron \delta \iota \kappa \acute{\eta}$ με περίοδο T , τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ' ένα διάστημα πλάτους T .

Ε. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 18

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο $\Delta^{(1)}$** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

ΘΕΜΑ 43 (ΘΕΩΡΗΜΑ)

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

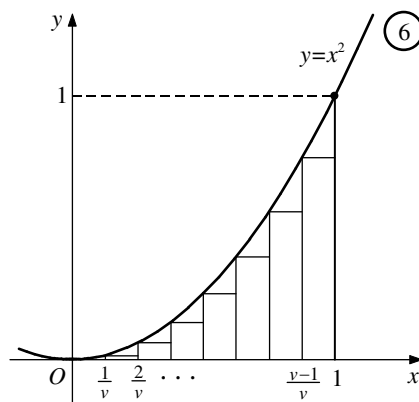
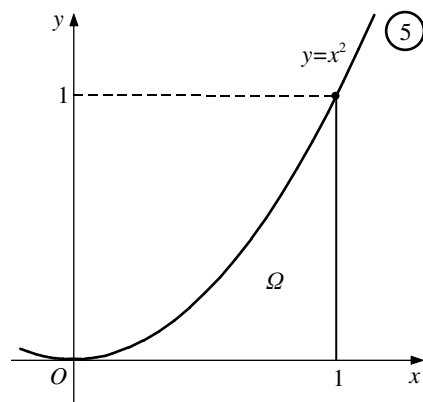
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Άρα, σύμφωνα με γνωστό πόρισμα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{για κάθε } x \in \Delta. \quad \blacksquare$$

ΘΕΜΑ 44 (Εμβαδόν παραβολικού χωρίου)

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ (Παραβολικό χωρίο Σχ. 5).



Μια μέθοδος να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής:

Χωρίζουμε το διάστημα $[0, 1]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{1}{n}$, με άκρα τα σημεία:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, \quad x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

- Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. (Σχ. 6). Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα, ε_n , των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= f(0) \frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right) \frac{1}{n} + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left[0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{v^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2]$$

$$= \frac{1}{v^3} \frac{(v-1) \cdot v(2v-1)}{6} = \frac{2v^2 - 3v + 1}{6v^2}.$$

• Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της f σε καθένα απ' αυτά (Σχ. 7), τότε το άθροισμα

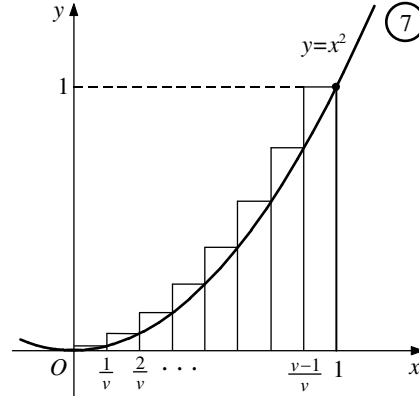
$$E_v = f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right) \frac{1}{v}$$

των εμβαδών των ορθογώνιων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Είναι όμως,

$$E_v = f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right) \cdot \frac{1}{v}$$

$$= \frac{1}{v} \left[\left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v}{v}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{v^3} (1^2 + 2^2 + \dots + v^2) = \frac{1}{v^3} \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} = \frac{2v^2 + 3v + 1}{6v^2}.$$



Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν E βρίσκεται μεταξύ των ε_v και E_v . Δηλαδή ισχύει $\varepsilon_v \leq E \leq E_v$, οπότε

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v \leq E \leq \lim_{v \rightarrow \infty} E_v.$$

Επειδή $\lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v = \lim_{v \rightarrow \infty} E_v = \frac{1}{3}$, έχουμε $E = \frac{1}{3}$.

• Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα $[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]$, $\kappa = 1, 2, \dots, v$ και ύψη την τιμή της συνάρτησης σε οποιοδήποτε ενδιαμέσο σημείο ξ_{κ} , $\kappa = 1, 2, \dots, 3, \dots, v$, καθενός διαστήματος, (Σχ. 8), τότε το άθροισμα

$$S_v = \frac{1}{v} f(\xi_1) + \frac{1}{v} f(\xi_2) + \dots + \frac{1}{v} f(\xi_v)$$

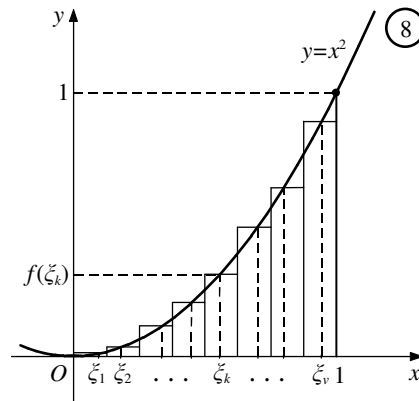
των εμβαδών των ορθογώνιων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Επειδή $f(x_{\kappa-1}) \leq f(\xi_{\kappa}) \leq f(x_{\kappa})$ για $\kappa = 1, 2, \dots, v$, θα είναι

$$\frac{1}{v} f(x_{\kappa-1}) \leq \frac{1}{v} f(\xi_{\kappa}) \leq \frac{1}{v} f(x_{\kappa}),$$

οπότε θα ισχύει

$$\varepsilon_v \leq S_v \leq E_v.$$

Είναι όμως, $\lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v = \lim_{v \rightarrow \infty} E_v = E$. Άρα θα ισχύει $\lim_{v \rightarrow \infty} S_v = E$.



ΘΕΜΑ 45 (Ορισμός εμβαδού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$.

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω (Σχ. 9) εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Δηλαδή:

- Χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta - a}{n}$, με τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$.

- Σε κάθε υποδιαστήμα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)]\Delta x.$$

- Υπολογίζουμε το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k .

Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \geq 0$.

ΘΕΜΑ 46 (Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος)

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$. Με τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$

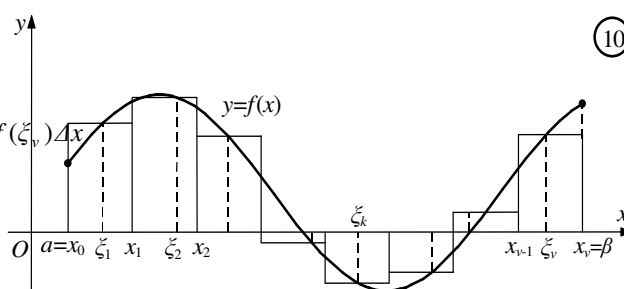
χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - a}{n}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x. \text{ (Άθροισμα Riemann)}$$



Αποδεικνύεται ότι,

“Το όριο του αθροίσματος S_n , δηλαδή το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x \right)$ Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται

ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το a στο β , συμβολίζεται με $\int_a^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το a στο β ”. Δηλαδή,

$$\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x \right)$$

Παρατήρηση:

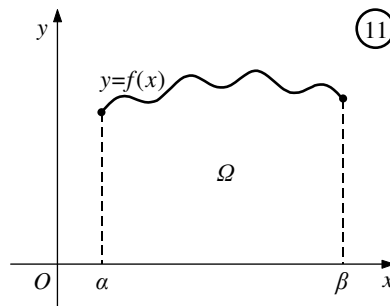
Ισχύουν

- $\int_a^\beta f(x)dx = -\int_\beta^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή,

$$\int_a^\beta f(x)dx = E(\Omega).$$



Επομένως,

$$\text{Αν } f(x) \geq 0, \text{ τότε } \int_a^\beta f(x)dx \geq 0.$$

Παρατήρηση:

Ισχύει ότι $\int_a^\beta c dx = c(\beta - a)$, για οποιοδήποτε $c \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 47α(ΘΕΩΡΗΜΑ) (χ.α.) Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω f, g σ υ ν ε χ ή ς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_a^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^\beta f(x)dx$
- $\int_a^\beta [f(x) + g(x)]dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_a^\beta g(x)dx$

και γενικά

$$\int_a^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_a^\beta f(x)dx + \mu \int_a^\beta g(x)dx$$

ΘΕΜΑ 47β (ΘΕΩΡΗΜΑ) (χ.α.)

Αν η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και $a, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

ΘΕΜΑ 47γ (ΘΕΩΡΗΜΑ) (χ.α.)

Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_a^\beta f(x)dx > 0.$$

ΘΕΜΑ 48 (ΘΕΩΡΗΜΑ) (χ.α.)- ερμηνεία

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in \Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ . Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (Σχ.) ως εξής:

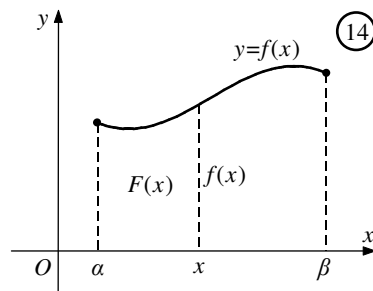
$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

= Εμβαδόν του χωρίου Ω .

$\approx f(x) \cdot h$, για μικρά $h > 0$.

Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$,

$$\text{Οπότε } F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$



Παρατήρηση: Ισχύει: $\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$,

ΘΕΜΑ 49 (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, θα υπάρξει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \quad (1)$$

Από την (1), για $x = a$, έχουμε $G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(a)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(a)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(a) = \int_a^\beta f(t)dt + G(a)$

και άρα $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$. ■

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

ΘΕΜΑ 50 (χ.α.):

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx ,$$

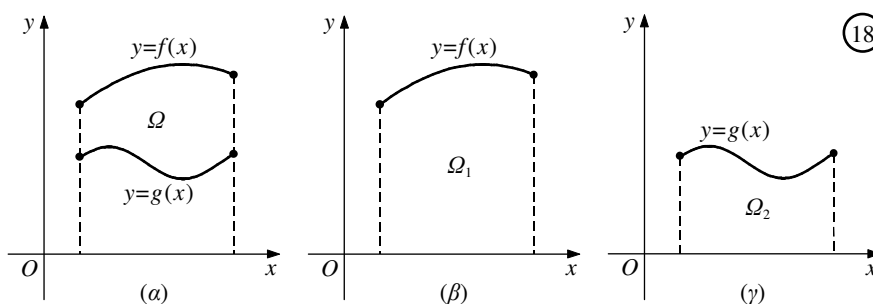
όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$.

$$\int_a^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du ,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(\beta)$.

ΘΕΜΑ 51 :

Έστω, δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ (Σχ. 18α).



Παρατηρούμε ότι $E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_a^\beta f(x)dx - \int_a^\beta g(x)dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$.

Επομένως,

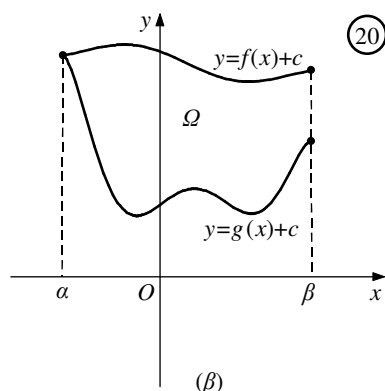
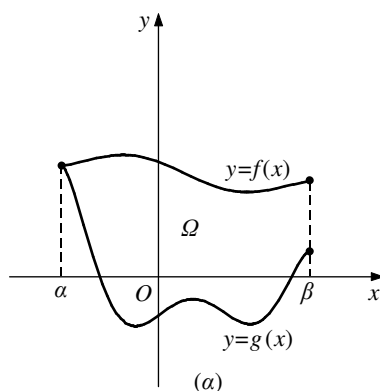
$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx \quad (1)$$

ΣΧΟΛΙΑ

Ο τύπος (1) βρέθηκε με την προϋπόθεση ότι:

(i) $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και (ii) οι f, g είναι μη αρνητικές στο $[a, \beta]$.

Ο τύπος (1) ισχύει και χωρίς την υπόθεση (ii). Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (Σχ. 20β).



Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

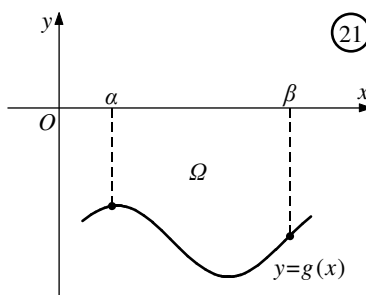
$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_a^b [(f(x) + c) - (g(x) + c)] dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx .$$

Άρα,

$$E(\Omega) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

• Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g , με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ (Σχ. 21). Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_a^\beta [-g(x)] dx = -\int_a^\beta g(x) dx . \end{aligned}$$



• Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε

$$E(\Omega) = -\int_a^\beta g(x) dx$$

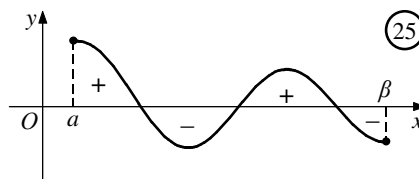
Όταν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 . Δηλαδή,

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) \\ &= \int_a^\gamma (f(x) - g(x)) dx + \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x)) dx + \int_\delta^\beta (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_a^\gamma |f(x) - g(x)| dx + \int_\gamma^\delta |f(x) - g(x)| dx + \int_\delta^\beta |f(x) - g(x)| dx = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$

Επομένως,

$$E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

- Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_a^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x



Πεπερασμένο όριο ακολουθίας

ΟΡΙΣΜΟΣ 19

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 20

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_n) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει

$$|\alpha_n - \ell| < \varepsilon$$

Z. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ C ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

Το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

- Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο R , με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού,
- Υπάρχει ένα στοιχείο i τέτοιο, ώστε $i^2 = -1$,
- Κάθε στοιχείο z του C γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in R$.

Ισότητα Μιγαδικών Αριθμών

ΘΕΜΑ 1(χ.α.):

$$\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta.$$

$$\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0.$$

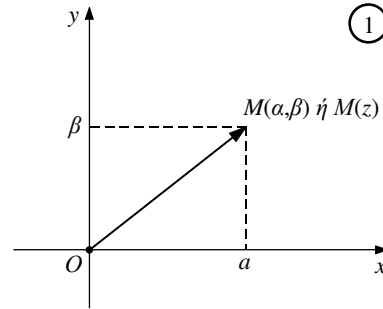
ΣΧΟΛΙΟ

Στην επέκταση από το R στο C , ενώ οι πράξεις και οι ιδιότητες αυτών που ισχύουν στο R εξακολουθούν να ισχύουν και στο C , εν τούτοις η διάταξη και οι ιδιότητές της δε μεταφέρονται.

ΘΕΜΑ 2 :

Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών

Κάθε μιγαδικό αριθμό $\alpha + \beta i$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο $M(\alpha, \beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και αντιστρόφως, κάθε σημείο $M(\alpha, \beta)$ του καρτεσιανού αυτού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο μιγαδικό $\alpha + \beta i$. Το σημείο M λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού $\alpha + \beta i$. Αν θέσουμε $z = \alpha + \beta i$, τότε το σημείο $M(\alpha, \beta)$ μπορούμε να το συμβολίζουμε και με $M(z)$.



Ένα καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα αναφέρεται ως **μιγαδικό επίπεδο**. Ο άξονας $x'x$ λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(\alpha, 0)$ που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών $\alpha = \alpha + 0i$, ενώ ο άξονας $y'y$ λέγεται **φανταστικός άξονας**, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(0, \beta)$ που είναι εικόνες των φανταστικών $\beta i = 0 + \beta i$.

Ένας μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα, $\overrightarrow{OM}$, του σημείου $M(\alpha, \beta)$.

ΘΕΜΑ 50 : Πράξεις στο C

- Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ έχουμε:

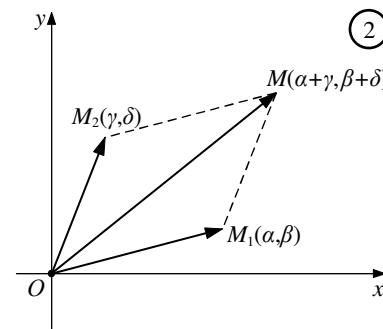
$$(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i.$$

Αν $M_1(\alpha, \beta)$ και $M_2(\gamma, \delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα $(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$

παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:

“Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους”.



- Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma + \delta i$ από τον $\alpha + \beta i$, επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού $\gamma + \delta i$ είναι ο μιγαδικός $-\gamma - \delta i$, έχουμε:

$$(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha + \beta i) + (-\gamma - \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i.$$

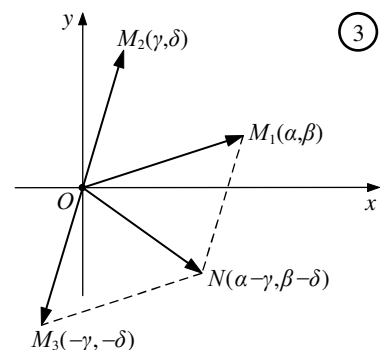
Δηλαδή $(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$.

Η διαφορά $(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$

παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha - \gamma, \beta - \delta)$. Επομένως,

$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:

“Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους”.



- Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών $a + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(a + \beta i)(\gamma + \delta i) &= a(\gamma + \delta i) + \beta i(\gamma + \delta i) = a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i + (\beta i)(\delta i) = \\ &= a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i + \beta\delta i^2 = a\gamma + a\delta i + \beta\gamma i - \beta\delta = (a\gamma - \beta\delta) + (a\delta + \beta\gamma)i.\end{aligned}$$

Δηλαδή, $(a + \beta i)(\gamma + \delta i) = (a\gamma - \beta\delta) + (a\delta + \beta\gamma)i$.

- Τέλος, για να εκφράσουμε το **πηλίκο** $\frac{a + \beta i}{\gamma + \delta i}$, όπου $\gamma + \delta i \neq 0$, στη μορφή $\kappa + \lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρο-νομαστή και έχουμε:

$$\frac{a + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{(a + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{(a\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - a\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{a\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - a\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i.$$

Δηλαδή, $\frac{a + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{a\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - a\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Ο αριθμός $a - \beta i$ λέγεται **συζυγής** του $a + \beta i$ και συμβολίζεται με $\overline{a + \beta i}$. Δηλαδή,

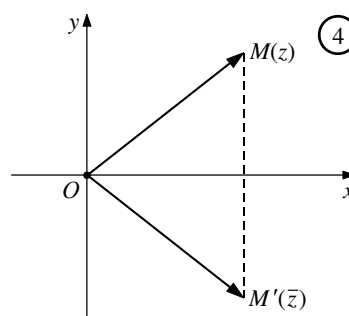
$$\overline{a + \beta i} = a - \beta i.$$

ΘΕΜΑ 3 : Δύναμη Μιγαδικού

$$i^v = i^{4\rho + v} = i^{4\rho} i^v = (i^4)^\rho i^v = 1^\rho i^v = i^v = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } v = 0 \\ i & , \text{ αν } v = 1 \\ -1 & , \text{ αν } v = 2 \\ -i & , \text{ αν } v = 3 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4: Ιδιότητες Συζυγών

- Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(a, \beta)$ και $M'(a, -\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z = a + \beta i$ και $\bar{z} = a - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.



- Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z = a + \beta i$ και $\bar{z} = a - \beta i$ μπορούμε εύκολα, με εκτέλεση των πράξεων, να διαπιστώσουμε ότι:

$$\begin{aligned}z + \bar{z} &= 2a \\ z - \bar{z} &= 2\beta i.\end{aligned}$$

- Αν $z_1 = a + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

$$\begin{array}{l} 1. \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ 2. \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ 3. \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ 4. \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \end{array}$$

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα έχουμε:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(a + \gamma) + (\beta + \delta)i} \\ &= (a + \gamma) - (\beta + \delta)i = (a - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

Ισχύουν ακόμη:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n \\ \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n. \end{aligned}$$

Ιδιαίτερα, αν είναι $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$, τότε η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

ΘΕΜΑ 5: Επίλυση της Εξίσωσης $az^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και κάθε εξίσωση δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο $\mathbb{C}$. Πράγματι, έστω η εξίσωση

$$az^2 + \beta z + \gamma = 0, \quad \text{με } a, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ και } a \neq 0.$$

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\mathbb{R}$ και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z + \frac{\beta}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2},$$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0$. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z = \frac{-\beta}{2a}$
- $\Delta < 0$. Τότε, επειδή $\frac{\Delta}{4a^2} = \frac{(-1)(-\Delta)}{4a^2} = \frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2a)^2} = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται:

$$\left(z + \frac{\beta}{2a}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2.$$

$$\text{Άρα οι λύσεις της είναι: } z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a},$$

οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

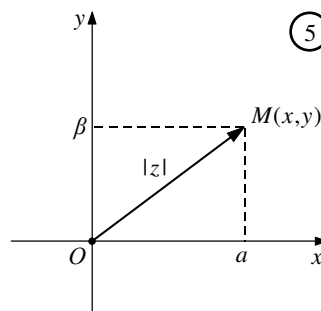
ΣΧΟΛΙΟ

Παρατηρούμε ότι και εδώ ισχύουν οι σχέσεις: $z_1 + z_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$ και $z_1 z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 6: Μέτρο μιγαδικού

Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή O , δηλαδή

$$|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



ΘΕΜΑ 7: Αν $z = x + yi$, τότε $\bar{z} = x - yi$ και $-z = -x - yi$. Επομένως,

- $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \\ &\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \\ &\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

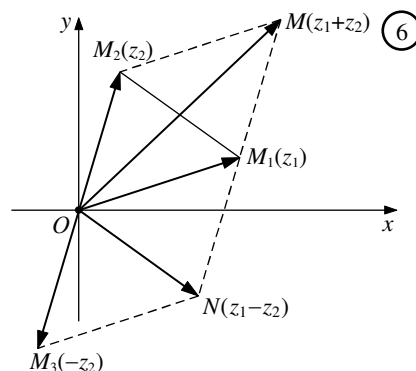
$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$$

και ειδικότερα

$$|z^n| = |z|^n.$$

Τέλος, από τη γνωστή μας τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $z_1 + z_2$ και της διαφοράς $z_1 - z_2$ δύο μιγαδικών προκύπτει ότι:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



ΘΕΜΑ 8: “Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους”.

Δηλαδή:

$$(M_1 M_2) = |z_1 - z_2|$$

ΘΕΜΑ 10: Η εξίσωση

$$|z - z_0| = \rho, \quad \rho > 0$$

παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ .

ΘΕΜΑ 11: Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$

παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

