

Λύσεις Διαχωρίσματος

Θέμα Α

A1. Θεωρία (σελ. 135 σχολικού βιβλίου)

A2. Θεωρία (σελ. 142 σχολικού βιβλίου)

A3. 1.1 2.2. 3.2. 4.2. 5.1.

A4. Θεωρία (σελ. 143 σχολικού βιβλίου)

Θέμα Β

B1. • $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{1}{\ln x} \right) = 0 \cdot 0 = 0$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x) = -\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x \cdot \frac{1}{\ln x} \right) = -\infty$

διότι για $0 < x < 1$ είναι $\ln x < 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \dots = +\infty$ (ομοίως με το προηγούμενο)

B2. i) Βρίσκουμε ότι:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

x	$-\infty$	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	-	-0-	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

ii) Είναι: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

Επίσης βρίσκουμε ότι $f(e) = e$ και:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\substack{\text{D.L.H.}}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \end{aligned}$$

Τελικά $f(A) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

B3. Με $x > 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$e^x = x^a \Leftrightarrow \ln e^x = \ln x^a \Leftrightarrow x = a \cdot \ln x \quad (1)$$

Το $x=1$ δεν είναι λύση της (1).

Για $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x} = a \Leftrightarrow f(x) = a$$

Με τη βοήθεια του B2 προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x) = a$:

- για $a \in (-\infty, 0)$ έχει 1 λύση
- για $a \in [0, e)$ είναι αδύνατη
- για $a = e$ έχει 1 λύση
- για $a \in (e, +\infty)$ έχει 2 λύσεις.

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$\bullet x_1 < x_2 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \quad (1)$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \quad (2)$$

$$\text{Από } (1) + (2) \Rightarrow f(f(x_1)) + e^{x_1} < f(f(x_2)) + e^{x_2}$$

$$\Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

Γ2. Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$. Θ.δ.ο. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\text{Γνωρίζουμε ότι } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\bullet x > x_0 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x_0)$$

$$\Rightarrow l \geq f(x_0) \quad (3)$$

$$\bullet x < x_0 \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x) < f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x_0)$$

$$\Rightarrow l \leq f(x_0) \quad (4)$$

$$\text{Από } (3), (4) \Rightarrow l = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \neq 0$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επίσης:

$$f(0) \stackrel{\text{συνεχής}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 > 0$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) > 0 \stackrel{f \uparrow}{\implies} f(f(x)) > f(0) (=)$$

$$(\implies) f(f(x)) > 1 \quad (\implies)$$

$$(\implies) f(f(x)) + e^x > 1 + e^x$$

$$(\implies) g(x) > 1 + e^x > 1$$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\phi(x) = x^3 g(2x^4) + x^4 g(x^2) + x^2 f(x^2 - 1) - 1, \quad x \in [-1, 1]$$

• Η ϕ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$

• $\phi(-1) = -g(2) + g(1) + f(0) - 1 = g(1) - g(2) < 0$

διότι $1 < 2 \stackrel{g \uparrow}{\implies} g(1) < g(2)$

• $\phi(1) = g(2) + g(1) + f(1) - 1 = g(2) + g(1) > 0$

διότι $g(1) > 1$ και $g(2) > 1$

Από το Θεώρημα Bolzano

Από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει το ζητούμενο.

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) + e^x = f'(x) + e + 1 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^x - e - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 1 - e^{1-x} - e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = (x + e^{1-x} + e^{-x})'$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} f(x) = x + e^{1-x} + e^{-x} + C \quad (1)$$

Για $x=0$: $f(0) = e + 1 + C \Leftrightarrow e - 1 = e + 1 + C$
 $\Leftrightarrow C = -2$

Άρα:

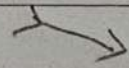
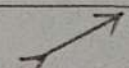
$$(1) \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = x + e^{1-x} + e^{-x} - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x e^x + e + 1 - 2 e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (x-2)e^x + e + 1$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ βρίσκουμε ότι:

$$f'(x) = (x-1)e^x$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Η f έχει Ο.Ε. στο $x_0=1$,
άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$
ισχύει:

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq -e + e + 1 \Leftrightarrow f(x) \geq 1$$

Δ2. Ισχύει ότι:

$$2f(g'(1)-1) + 3f(2g'(2)+2) \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f(g'(1)-1) - 2 \leq 3 - 3f(2g'(2)+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2(f(g'(1)-1)-1)}_{\geq 0} \leq \underbrace{3(1-f(2g'(2)+2))}_{\leq 0}$$

$$\Leftrightarrow f(g'(1)-1)=1 \quad \text{και} \quad f(2g'(2)+2)=1 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow g'(1)-1=1 \quad \text{και} \quad 2g'(2)+2=1$$

$$\Leftrightarrow g'(1)=2 \quad \text{και} \quad g'(2)=-\frac{1}{2}$$

(*) Διότι η ισότητα $f(x)=1$ ισχύει μόνο για $x=1$.

Θ.δ.ο. υπάρχει $\xi \in (1,2)$, ώστε:

$$g'(1) \cdot g''(\xi) = 10g'(2) \Leftrightarrow 2g''(\xi) = 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow g''(\xi) = -\frac{5}{2}$$

- Η g' είναι παραγόμενη στο $[1,2]$.
- Η g' είναι συνεχής στο $[1,2]$.

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1,2)$, ώστε:

$$g''(\xi) = \frac{g'(2) - g'(1)}{2-1} = \frac{-\frac{1}{2} - 2}{1} = -\frac{5}{2}$$

Δ3. • Η g' είναι συνεχής στο $[1, 2]$

• $g'(1) = 2 > 0$ και $g'(2) = -\frac{1}{2} < 0$

Από το Λεώρημα Βολζανο υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $g'(x_0) = 0$. Η g' είναι $\searrow$, άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Έχουμε:

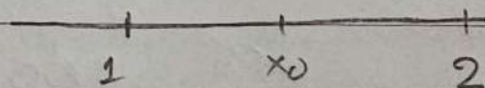
• $x < x_0 \xrightarrow{g' \searrow} g'(x) > g'(x_0) \Leftrightarrow g'(x) > 0$

• $x > x_0 \xrightarrow{g' \searrow} g'(x) < g'(x_0) \Leftrightarrow g'(x) < 0$

Η g έχει Ο.Μ.
στο x_0

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Από το Θ.Μ.Τ. για
την g' στα διαστήματα
 $[1, x_0]$ και $[x_0, 2]$



προκύπτει ότι υπάρχουν $x_1 \in (1, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, 2)$,
ώστε:

• $g''(x_1) = \frac{g'(x_0) - g'(1)}{x_0 - 1} = \frac{-2}{x_0 - 1}$

• $g''(x_2) = \frac{g'(2) - g'(x_0)}{2 - x_0} = \frac{-\frac{1}{2}}{2 - x_0} = \frac{-1}{2(2 - x_0)}$

Ισχύει ότι:

$$1 + \frac{2}{g''(x_1)} + \frac{1}{2g''(x_2)} = 1 + \frac{2}{\frac{-2}{x_0 - 1}} + \frac{1}{2 \cdot \frac{-1}{2(2 - x_0)}} =$$

$$= 1 - (x_0 - 1) - (2 - x_0) = 1 - x_0 + 1 - 2 + x_0 = 0$$

Δ4. Η g' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και

$$g'(1)=2 \text{ και } g'(2)=-\frac{1}{2}. \text{ Ο αριθμός } 1$$

βρίσκεται μεταξύ των $g'(1)$ και $g'(2)$, άρα

από το Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0 \in (1,2)$, ώστε $g'(x_0)=1$

Η εφαπτομένη της C_g στο $M(x_0, g(x_0))$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = x - x_0 + g(x_0)$$

Η (ε) τέμνει τον $x'x$ στο $A(0, g(x_0) - x_0)$

και τον $y'y$ στο $B(x - g(x_0), 0)$

Είναι $OA = OB = |g(x_0) - x_0| \neq 0$, διότι

είναι $g(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα η (ε) σχηματίζει με τους άξονες

ισοσκελές τρίγωνο.