

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Θέμα Α

- A1.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat. (Μονάδες 6)
- A2.** Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; (Μονάδες 6)
- A3.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ καθώς και ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Μονάδες 7)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα, τότε ισχύει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β) Μια πολυωνυμική συνάρτηση 3^{ου} βαθμού έχει πάντα ένα σημείο καμπής. (Μονάδες 6)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

- B1.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)
- B2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 6)
- B3.** Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = e^{ax^2}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a . (Μονάδες 6)
- B4.** Ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{2}$ μονάδες/s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι 1. (Μονάδες 7)

Θέμα Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$2e^{f(1)} = (f(1) + 1)^2 + \frac{2}{e} \quad \text{και} \quad f(x) + 1 = f'(x) - e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $f(1) = -1$. (Μονάδες 6)

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x - 1)e^x - 1$. (Μονάδες 6)
- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία ανήκει στο διάστημα $(1, 2)$. (Μονάδες 6)
- Γ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x - 2)e^x = x + 4$ έχει ακριβώς 2 ρίζες. (Μονάδες 7)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^x$.

- Δ1.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ασκρότατα. (Μονάδες 3)
- Δ2.** Αν για τον θετικό αριθμό α ισχύει ότι $f(x) \geq \alpha^{x-1}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$. (Μονάδες 5)
- Δ3.** Να αποδείξετε ότι $\frac{\ln x}{x+1} < \frac{\ln(x+1)}{x}$, για κάθε $x \geq \frac{1}{e}$. (Μονάδες 2)
- Δ4.** Έστω $h(x) = \ln x + 1$.
- α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και h δέχονται μοναδική κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο, η οποία έχει εξίσωση $y = x$. (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq h(x)$ για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 4)
- Δ5.** Έστω $g(x) = f(x) \cdot f(1 - x)$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g . (Μονάδες 1)
- β) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 3)
- γ) Αν ισχύει ότι $g(\alpha) + g(\beta) = 1$, να βρείτε τα α και β . (Μονάδες 2)