

Τράπεζα Θεμάτων – Συνέχεια συνάρτησης

29838 – Θέμα 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$xf(x) + \sin x = 1 - x^2 \eta \mu \frac{1}{x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$

(Μονάδες 4)

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα

$$\left(\frac{1}{\pi}, +\infty \right).$$

(Μονάδες 7)

26640 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 5)

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

23106 – Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0, \pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε:

$$(g \circ f)(x) = |\sin x|, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

α)

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta \mu x|$.

(Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f .

(Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

(Μονάδες 07)

28684 – Θέμα 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa, \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x) \leq \eta \mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 2x}{x} = 2$$

(Μονάδες 04)

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το $f(0)$.

(Μονάδες 04)

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

$$\left| f(x) \cdot \frac{\varepsilon \varphi x}{x} \right| = -f(x) \cdot \frac{\varepsilon \varphi x}{x} \text{ κοντά στο } 0$$

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 08)