

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΙΣΟΤΗΤΑ
ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ
ΚΥΚΛΟΥ ΕΥΘΕΙΑΣ
- ΚΥΚΛΩΝ

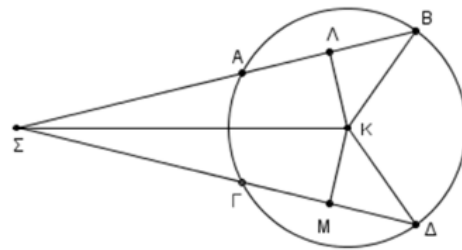
(1η εργασία)

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

2^ο ΘΕΜΑ

1. Ισότητα τριγώνων

Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (Κ, ρ)
θεωρούμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του
κύκλου για τις οποίες ισχύει $ΣΒ=ΣΔ$. Τα ΚΛ και
ΚΜ είναι τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και
ΓΔ του κύκλου αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΚΔΣ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

ii. $ΚΛ = ΚΜ$.

(Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες.

(Μονάδες 5)

2. Ισότητα τριγώνων

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν
 $ΕΗ \perp ΒΓ$ και $ΔΖ \perp ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) $ΕΗ = ΔΖ$.

(Μονάδες 12)

3. Ισότητα τριγώνων - ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{Γ}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο
σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο
σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΔ = ΔΕ$

(Μονάδες 13)

β) $ΑΔ < ΔΒ$

(Μονάδες 12)

4. Ισότητα τριγώνων

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) $ΑΔ = ΑΕ$

(Μονάδες 10)

5. Ισότητα τριγώνων

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και ML του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $MK = ML$.

(Μονάδες 13)

β) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας KML .

(Μονάδες 12)

6. Ισότητα τριγώνων

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα MD και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι

α) $MD = ME$

(Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές

(Μονάδες 13)

7. ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα - ισότητα τριγώνων

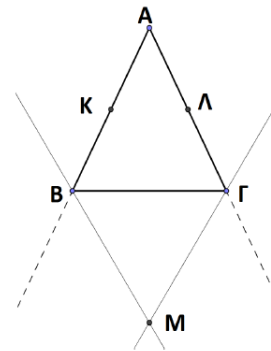
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $MK = M\Lambda$.

(Μονάδες 13)



8. Ισότητα τριγώνων

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των

γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) Οι γωνίες $\hat{AIB}$ και $\hat{AIG}$ είναι ίσες.

(Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

(Μονάδες 7)

9. Ισότητα τριγώνων

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα MD .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma D$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Τα σημεία A και D ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

(Μονάδες 13)

10. Ισότητα τριγώνων

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA (προς το A).

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = BE$

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

11. Ισότητα τριγώνων - ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα

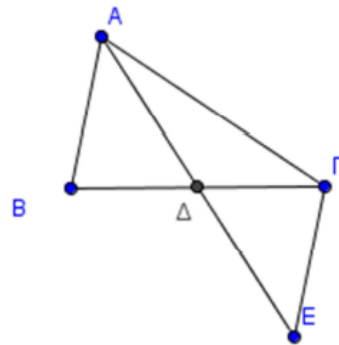
Στο ακόλουθο σχήμα, η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της $A\Delta$, ώστε $\Delta E = A\Delta$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = \Gamma E$

(Μονάδες 12)

β) $A\Delta < \frac{AB + A\Gamma}{2}$

(Μονάδες 13)



12. Ισότητα τριγώνων

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{B}$, η οποία τέμνει την πλευρά AC στο Δ . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

(Μονάδες 12)

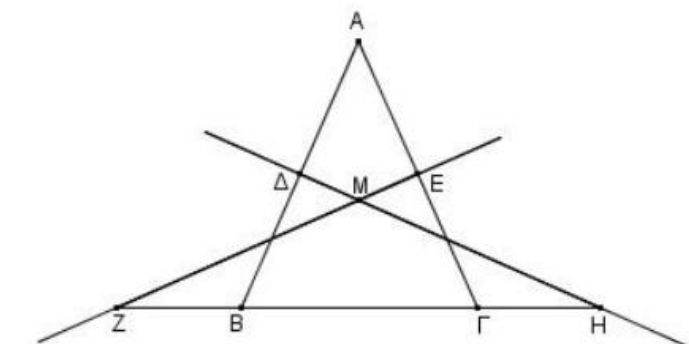
13. Ισότητα τριγώνων

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα Z και H .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.



(Μονάδες 10)

14. Ισότητα τριγώνων - ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AG = AB$.

(Μονάδες 13)

15. Ισότητα τριγώνων

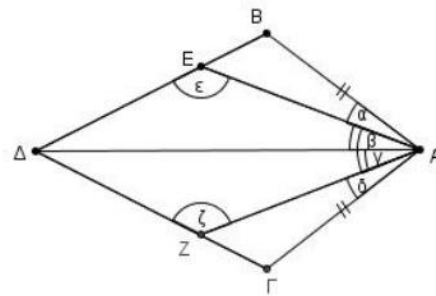
Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = AG$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.

(12 Μονάδες)

β) Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες.

(13 Μονάδες)



16. Ισότητα τριγώνων - ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα

Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = BG$

και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{BAG} = \hat{BGA}$

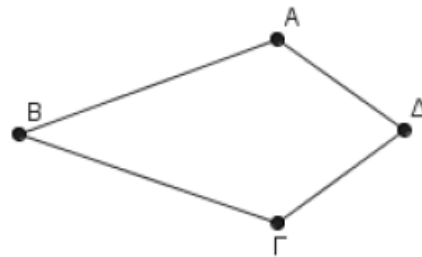
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

(Μονάδες 7)



17. Ισότητα τριγώνων - ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) του

σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

(Μονάδες 9)

