

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΙΣΟΤΗΤΑ
ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ
ΚΥΚΛΟΥ ΕΥΘΕΙΑΣ
- ΚΥΚΛΩΝ

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

(2η) εργασία
2ο ΘΕΜΑ

18. στοιχεία κύκλου - τριγώνου

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες AOB , $BOΓ$ και $ΓOA$.

α) Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας AO διχοτομεί τη γωνία $BOΓ$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $ABΓ$ ως προς τις πλευρές του. (Μονάδες 8)

γ) Αν με κέντρο O και ακτίνα OK όπου K το μέσο της ακτίνας OA , γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες OB και $OΓ$ στα σημεία $Λ$ και M αντίστοιχα, τότε τα τόξα KM και AB είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

19. ισότητα τριγώνων

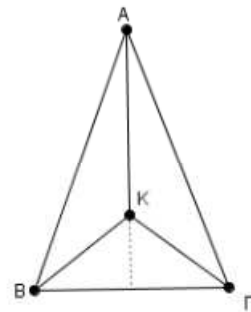
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB=AG$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB=KΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα BAK και $KAΓ$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Η AK είναι διχοτόμος της $\hat{A}$. (Μονάδες 6)

γ) Η προέκταση της AK διχοτομεί τη γωνία $\hat{BKΓ}$ του τριγώνου $BKΓ$. (Μονάδες 7)



20. ισότητα τριγώνων

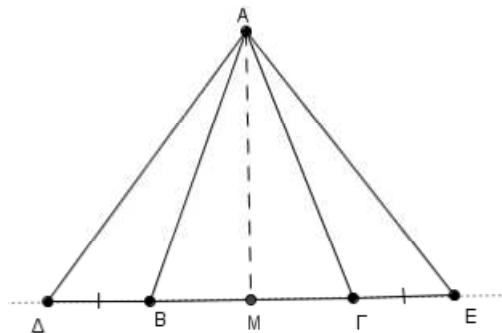
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB=AG$). Στην προέκταση της πλευράς $BΓ$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = ΓE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B}_{εξ} = \hat{Γ}_{εξ}$ (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AΓE$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

γ) Η διάμεσος AM του τριγώνου $ABΓ$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$. (Μονάδες 7)



21. Ισότητα τριγώνων

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου ABΓ παίρνουμε τα τμήματα $AD = AB$ και $AE = AG$.
Να αποδείξετε ότι

- α) Τα τρίγωνα ABΓ και ADE είναι ίσα. (Μονάδες 12)
- β) Η προέκταση της διαμέσου AM προς το μέρος της κορυφής A διχοτομεί την πλευρά ED του τριγώνου ΔAE. (Μονάδες 13)

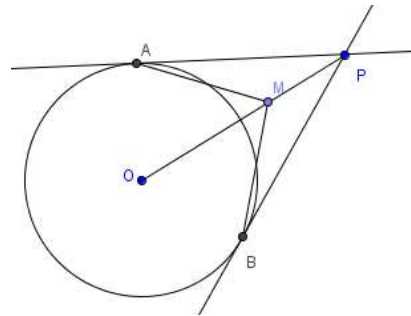
22. Ισότητα τριγώνων

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = MG$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα AMB και AMG είναι ίσα. (Μονάδες 12)
- β) Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{BMG}$. (Μονάδες 13)

23. Ισότητα τριγώνων – σχετικές θέσεις κύκλου ευθείας

Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB. Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP, να αποδείξετε ότι:



- α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα. (Μονάδες 12)
- β) οι γωνίες $\widehat{MAO}$ και $\widehat{MBO}$ είναι ίσες. (Μονάδες 13)

24. ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα - ισότητα τριγώνων

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) και στις ίσες πλευρές AB, AG παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD = \frac{1}{3} AB$ και $AE = \frac{1}{3} AG$. Αν M είναι το μέσο της BΓ, να αποδείξετε ότι:

- α) τα τμήματα BD και ΓE είναι ίσα. (Μονάδες 5)
- β) τα τρίγωνα BDM και MEG είναι ίσα. (Μονάδες 10)
- γ) το τρίγωνο DEM είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

25. Ισότητα τριγώνων

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA = KB$) και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M, έτσι ώστε $AL = BM$. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο KLM είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
- β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου KLM (Μονάδες 13)

26. Ισότητα τριγώνων – ανισοτικές σχέσεις

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = BG$ και $DA = DG$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

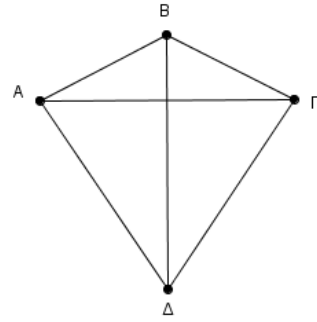
Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 12)

β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

(Μονάδες 13)



27. Ισότητα τριγώνων

Δίνεται γωνία $\chi O \gamma$ και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οχ και Ογ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $MA = MB$.

(Μονάδες 15)

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{AMB}$.

(Μονάδες 10)

28. Ισότητα τριγώνων - ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα

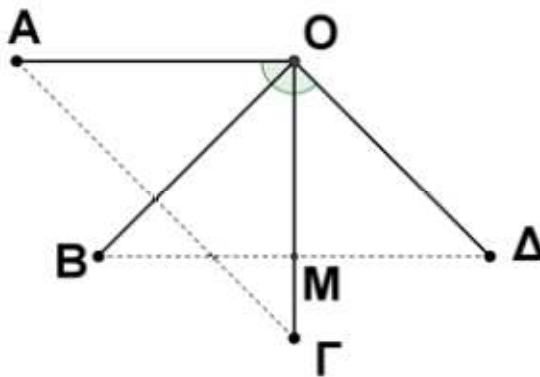
Αν $\hat{A} \hat{O} B = \hat{B} \hat{O} \Gamma = \hat{G} \hat{O} \Delta$ και $OA = OB = OG = OD$, να αποδείξετε ότι:

α) $AG = BD$.

(Μονάδες 10)

β) το Μ είναι μέσον της ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.

(Μονάδες 15)



29. ανισοτικές σχέσεις τριγώνων

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = DE$

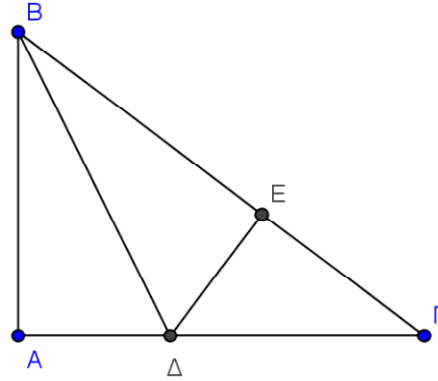
(Μονάδες 8)

β) $AD < ΔΓ$

(Μονάδες 9)

γ) $AG > AB$

(Μονάδες 8)



30. ισότητα τριγώνων

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $AD = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = ΓΔ$

(Μονάδες 6)

β) $BD = ΓΕ$

(Μονάδες 10)

γ) $\hat{\Delta BG} = \hat{EGB}$

(Μονάδες 9)

31. ισότητα τριγώνων

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB, AG αντίστοιχα.

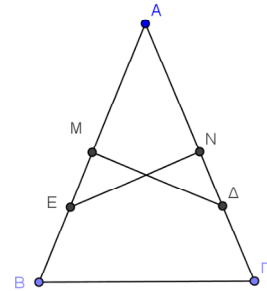
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $MD = NE$ τότε το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) Αν $AB = AG$ τότε $MD = NE$

(Μονάδες 13)



32. ισότητα τριγώνων

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα.

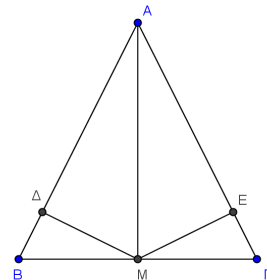
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $MD = ME$, τότε τα τρίγωνα AMΔ και AMΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

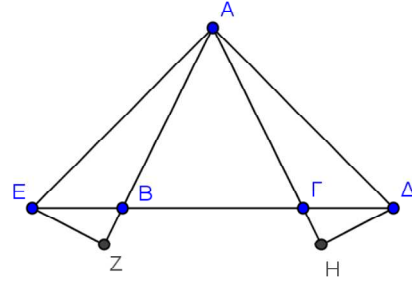
β) Αν $AB = AG$ και Μ μέσο του ΒΓ, τότε $MD = ME$.

(Μονάδες 12)



33. Ισότητα τριγώνων

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε DH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:



α) $AD = AE$ (Μονάδες 12)

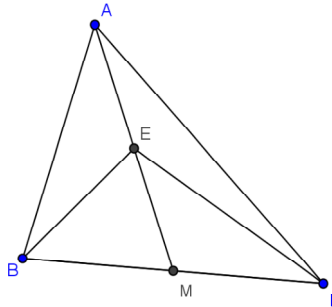
β) $EZ = DH$ (Μονάδες 13)

34. Ισότητα τριγώνων

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM . Αν $B\Gamma = 2 BE$ να αποδείξετε ότι:

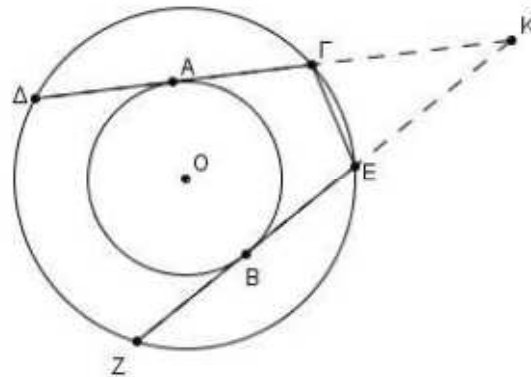
α) $\hat{AEB} = \hat{EM\Gamma}$ (Μονάδες 12)

β) $AB = E\Gamma$. (Μονάδες 13)



35. Ισότητα τριγώνων - σχετικές θέσεις κύκλου ευθείας

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.
(12 Μονάδες)

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(13 Μονάδες)