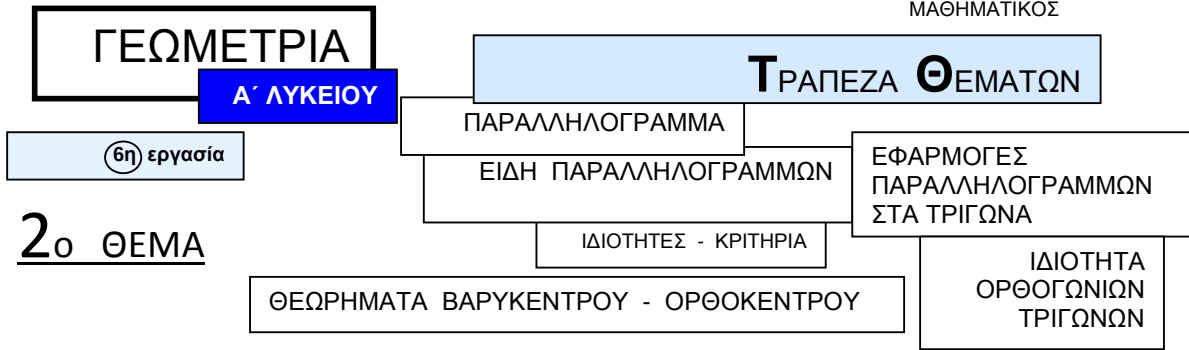


ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ



75.

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά AD κατά τμήμα $DE=AD$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη AD στο σημείο H .
Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
- β) το $DE\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- γ) η AH είναι διάμεσος του BAE τριγώνου. (Μονάδες 9)

76.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και GN .
Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $MD=BM$ και την GN (προς το N) κατά τμήμα $NE=GN$.

- α) Να αποδείξετε ότι $AD//B\Gamma$ και $AE//B\Gamma$. (Μονάδες 13)
- β) Είναι τα σημεία E , A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

77.

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνίός του $B\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ADE και ΓBZ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

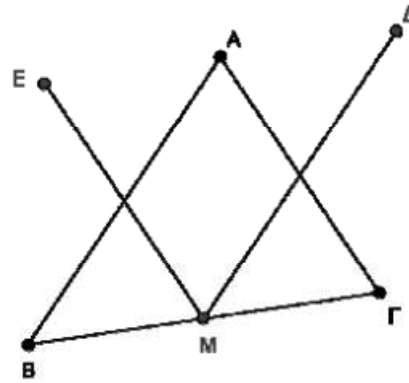
78.

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, προεκτείνουμε την πλευρά DA (προς το A) κατά τμήμα $AH=DA$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, η οποία τέμνει την AB στο σημείο Z .
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
- β) Το τρίγωνο ΔZH είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$. (Μονάδες 13)

79.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓΑ. Να αποδείξετε ότι:



α) $DA=AE$

(Μονάδες 8)

β) Τα σημεία Δ, Α και Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 9)

γ) $DE=BC$

(Μονάδες 8)

80.

Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $AB=2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

81.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε $OE=OZ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $DE=BZ$

(Μονάδες 12)

β) το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)

82.

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = \frac{BG}{2}$

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 8)

γ) $DE = \frac{AG}{2}$

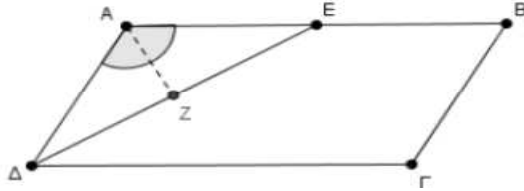
(Μονάδες 9)

83.

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη DE . Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία $\hat{A}\hat{D}E = 30^\circ$. (μον.10)

β) $AZ = \frac{AB}{4}$ (μον.15)

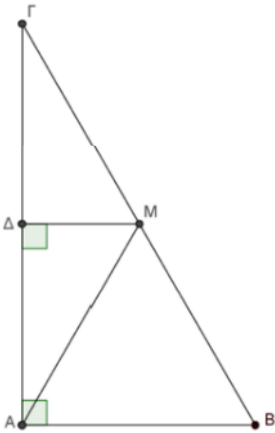


84.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $BΓ = 8$ cm. Έστω AM είναι διάμεσος του τριγώνου και $MΔ \perp AΓ$. Αν η γωνία $\hat{A}\hat{M}Γ$ είναι ίση με 120° , τότε:

α) Να δείξετε ότι $AB = 4$ cm. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της $MΔ$. (Μονάδες 13)



85.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$). Στην προέκταση της BA (προς το μέρος της κορυφής A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma E$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $BE \parallel AΓ$ και $AΓ = \frac{BE}{2}$. (Μονάδες 13)

86.

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB=2BG$ και Ε το μέσο της πλευράς του ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. (Μονάδες 15)

87.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $MD=DE$.
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 13)

88.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=AG$) και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $MD=DE$. Αν το σημείο Ζ είναι το ίχνος του Δ στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

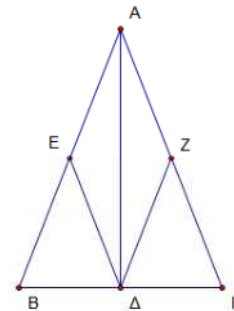
β) $\Delta Z = \frac{BG}{4}$ (Μονάδες 13)

89.

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=AG$), το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



90.

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ. (Μονάδες 12)

91.

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος AD και το μέσο Z της πλευράς $A\Gamma$. Προεκτείνουμε το ύψος AD (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα DE .

Να αποδείξετε ότι:

α) $DZ = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

92.

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AD . Προεκτείνουμε το AD (προς το Δ) κατά τμήμα $DE=AD$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το Δ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

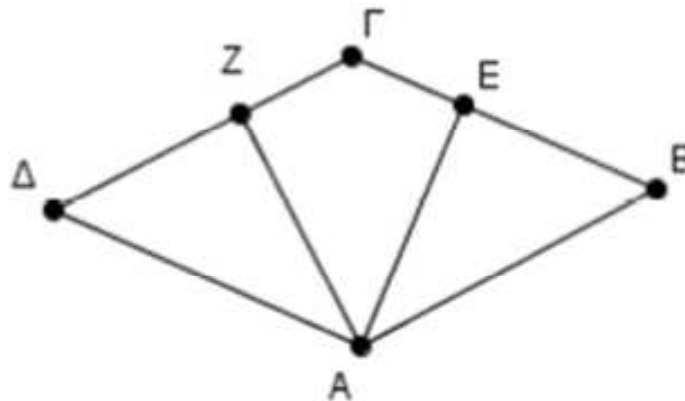
93.

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

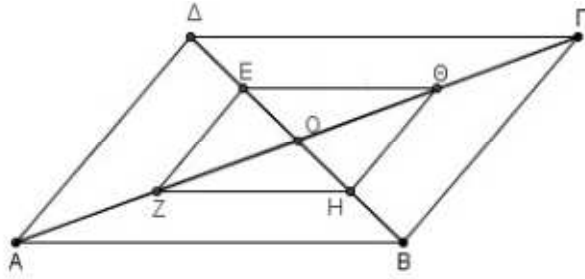
α) Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ=AE$. (Μονάδες 12)

β) Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ=AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)



94.

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O είναι το κέντρο του. Έστω E, Z, H, Θ τα μέσα των OD, OA, OB και OG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :



α) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του $E\Theta HZ$.

(Μονάδες 15)

95.

Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 12)

96.

Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες $AB, A\Gamma$ προς τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε M το μέσο του OA .

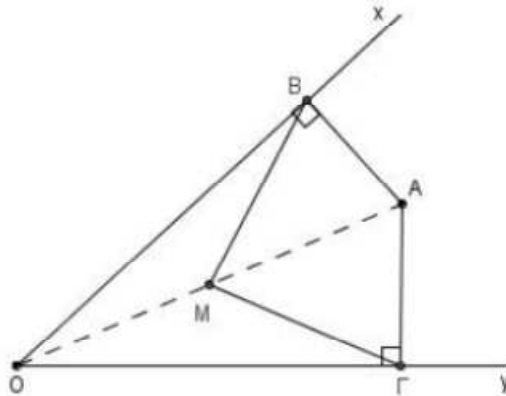
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) $\hat{BM\Gamma} = 2 \cdot \hat{xOy}$

(Μονάδες 15)



97.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος DE της γωνίας $\widehat{ADB}$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

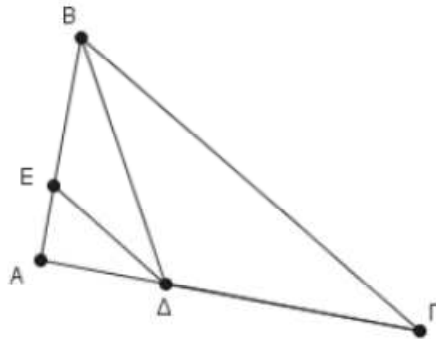
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Αν $\widehat{ADB} = 60^\circ$,

I. να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 8)

II. να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2AB$ (Μονάδες 7)



98.

Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $MD = MG$. (Μονάδες 12)

β) Η ευθεία MN είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$. (Μονάδες 13)

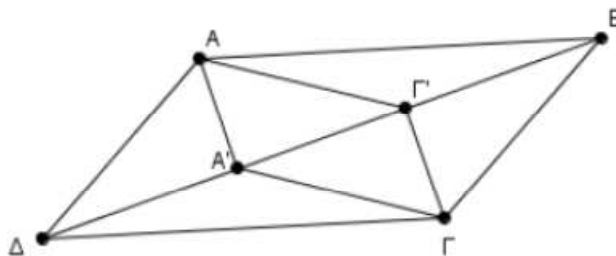
99.

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A' , Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$ (Μονάδες 8)

β) $AA' = \Gamma\Gamma'$ (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



100.

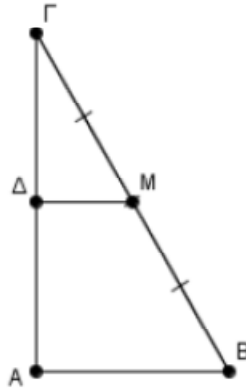
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην AB , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο Δ .

α) Να υπολογίσετε

I. τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)

II. τις γωνίες του τριγώνου $AM\Gamma$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $M\Delta$ είναι μεσοκάθετος του $A\Gamma$. (Μονάδες 9)



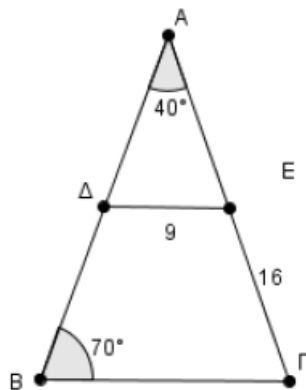
101.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)



102.

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

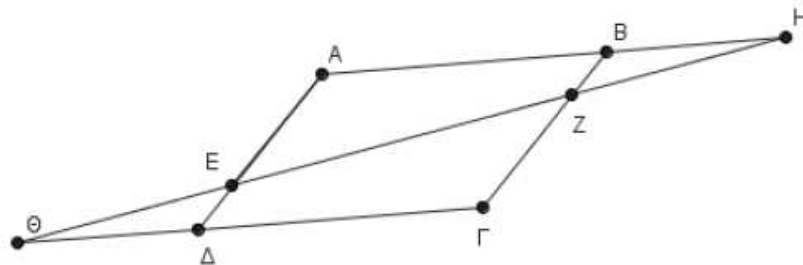
103.

Στις πλευρές AD και $B\Gamma$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$. Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία H και Θ , να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{HBZ} = \widehat{E\Delta\Theta}$ (Μονάδες 8)

β) $\widehat{BZH} = \widehat{\Delta E\Theta}$ (Μονάδες 8)

γ) $BH = \Theta\Delta$ (Μονάδες 9)



104.

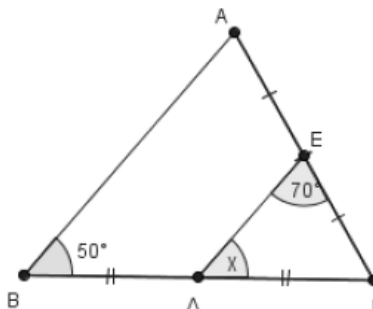
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\widehat{\Delta E\Gamma} = 70^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε

I. τη γωνία $\hat{X}$. (Μονάδες 8)

II. τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)



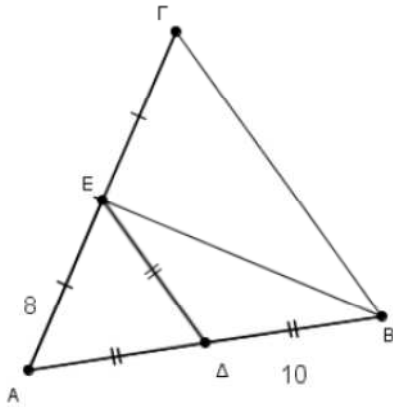
105.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $AD=ED=DB$ με $AE=8$ και $DB=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma=20$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)



106.

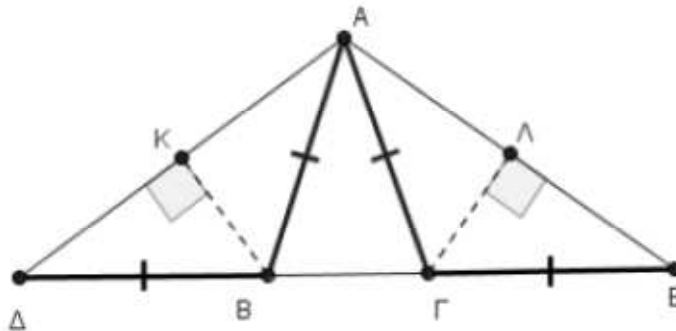
Στο ακόλουθο σχήμα ισχύουν $AB=BD=AG=GE=5$, $BK \perp AD$ και $GL \perp AE$.

α) Να προσδιορίσετε, ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K και L είναι τα μέσα των τμημάτων AD και AE αντίστοιχα. (Μονάδες 10)

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα KL .

(Μονάδες 9)



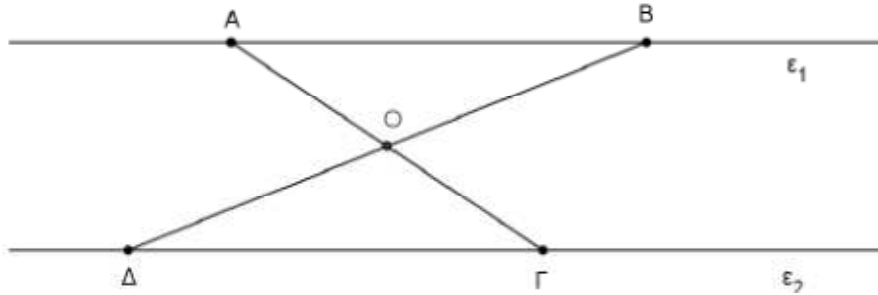
107.

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\epsilon_1 // \epsilon_2$ και το σημείο Ο είναι το μέσο της ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους. (Μονάδες 12)

β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



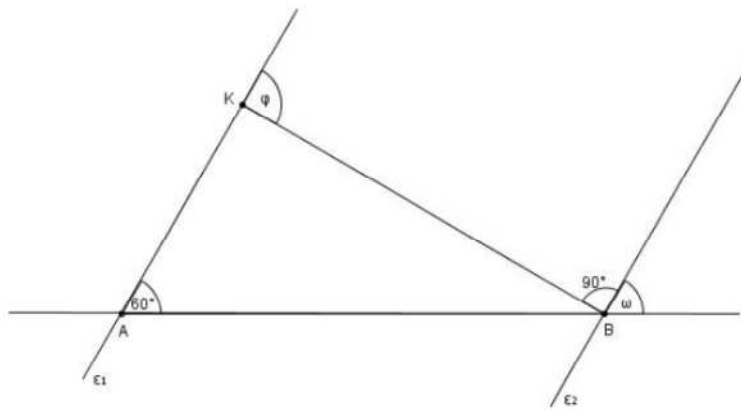
108.

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\epsilon_1 // \epsilon_2$ και $AB=6$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες ϕ και ω . (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΚ ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



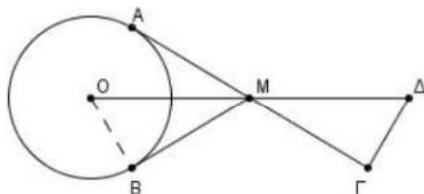
109.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ.

Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΓ=ΜΑ και την ΟΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΟΜ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα, και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους. (Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ΟΑ//ΓΔ. (Μονάδες 12)



110.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην Ax . Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

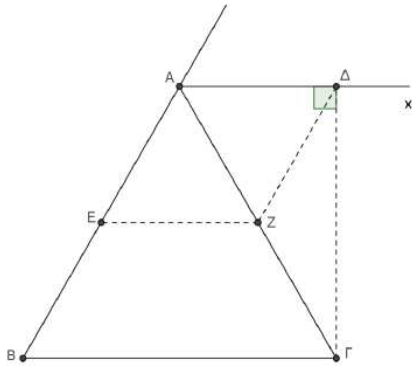
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 12)



111.

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ καθέτους στη διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AE = \Gamma Z$.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

112.

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $A\Gamma B$. Φέρουμε από τη κορυφή A ευθεία (ϵ) παράλληλη στη $B\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την (ϵ) στο Δ και την $B\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $E A = E B$.

(Μονάδες 6)

β) Αν M το μέσο του AB , να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και EMB .

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta B E$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 9)

