

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

4η εργασία

2ο ΘΕΜΑ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ
ΕΥΘΕΙΕΣ

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ν-ΓΩΝΟΥ

44.

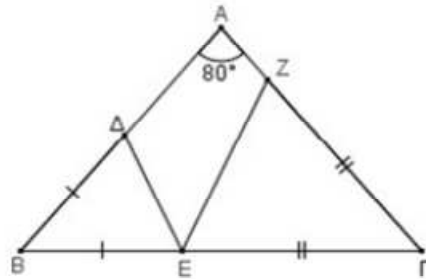
Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ είναι $\hat{A}=80^\circ$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο E στην πλευρά $B\Gamma$ και κατόπιν τα σημεία Δ και Z στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta=BE$ και $GE=GZ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $B\Delta E$ και GZE .

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Delta EZ}$.

(Μονάδες 10)



45.

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) φέρουμε τη διχοτόμο AD και μια ευθεία (ϵ) παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

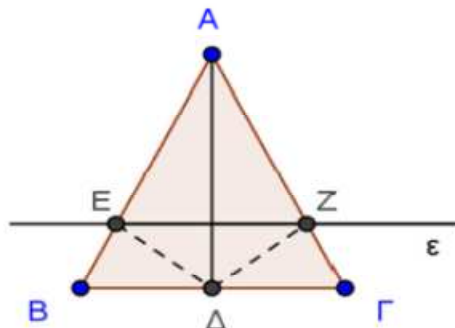
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A EZ$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα AED και AZD είναι ίσα.

(Μονάδες 15)



46.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE=AB$.

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $\hat{B\Delta A} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

(Μονάδες 13)

47.

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $XO\Psi$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές OX και $O\Psi$ της γωνίας στα σημεία A, B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

(Μονάδες 25)

48.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η εξωτερική γωνία A είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας B .

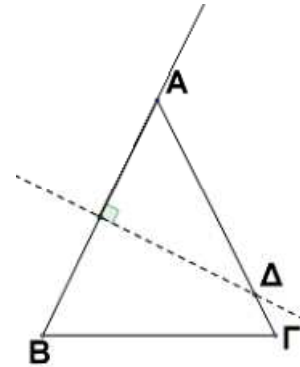
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο εσωτερικό της σημείο Δ .

Αν η γωνία $\hat{A\Delta B}$ είναι ίση με 80° , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 15)



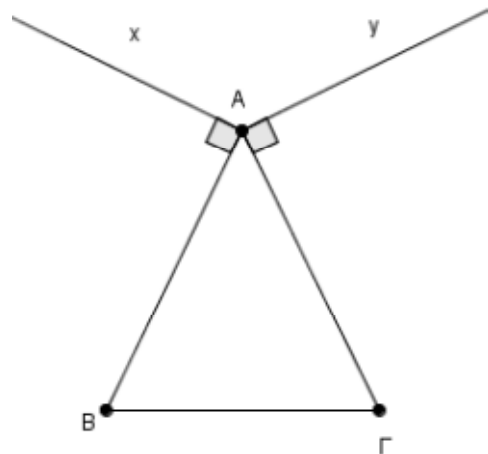
49.

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta=E\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\hat{BA\Gamma}$ είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta A E$.

(Μονάδες 13)



50.

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B'=A'\Gamma'$).

α) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $AG = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

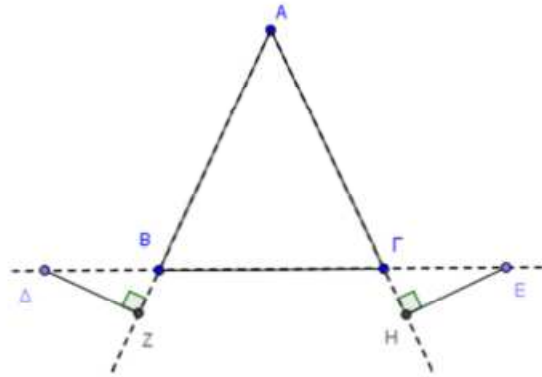
51.

Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta=GE$. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp AG$.

α) Να αποδείξετε ότι:
i. $BZ=GH$. (Μονάδες 10)
ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .

(Μονάδες 8)

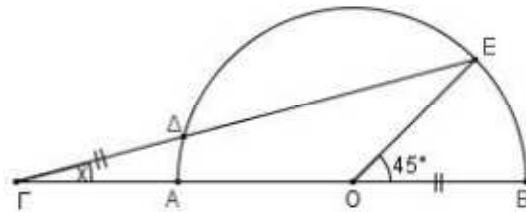


52.

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος GE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma\Delta$ ισούται με το OB και

η γωνία $\hat{BOE} = 45^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta GO}$.

(Μονάδες 25)



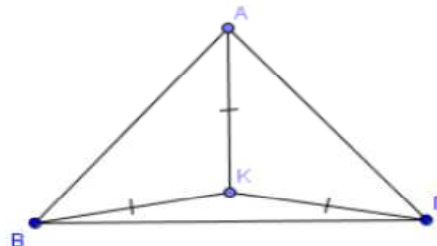
53.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $KB=KA=KG$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και GKA είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{ABK}$ και $\widehat{AGK}$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{BKG}$. (Μονάδες 7)

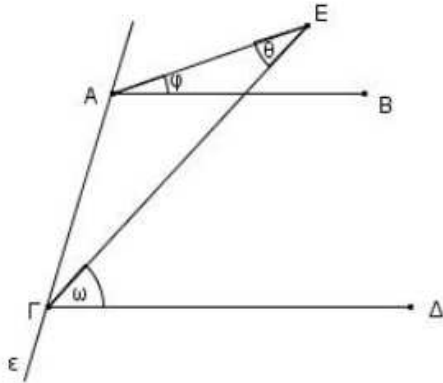


54.

Δίνεται ευθεία ϵ του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ϵ .

Να αποδείξετε ότι:

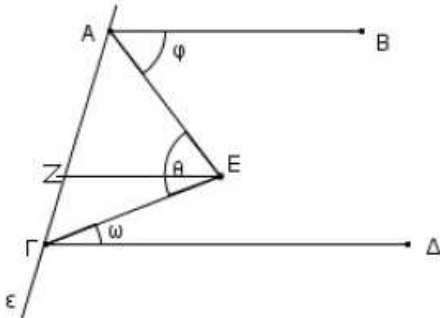
α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ τότε: $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$



(Μονάδες 10)

β) Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$$



(Μονάδες 15)

55.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma\chi \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

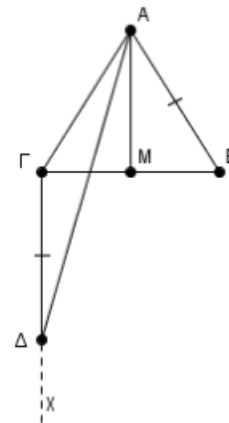
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $\hat{\Delta\hat{A}\hat{\Gamma}}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{\Gamma\hat{\Delta}\hat{A}}$.

(Μονάδες 12)

β) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{M\hat{A}\hat{\Gamma}}$.

(Μονάδες 13)



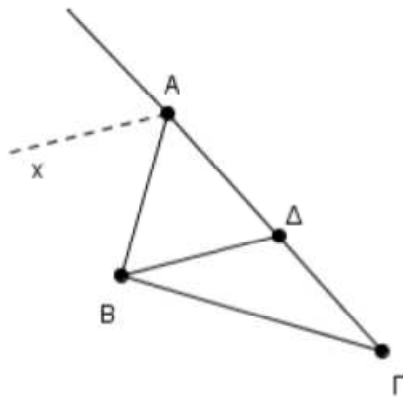
56.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\widehat{A_{εξ}} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)
- ii. $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$ (Μονάδες 5)

β) Αν η γωνία $\widehat{B\Delta\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$. (Μονάδες 10)



57.

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και ΓA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $AD=AB$ και $AE=A\Gamma$.

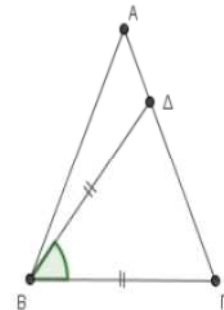
Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα. (Μονάδες 12)
- β) $ED \parallel B\Gamma$ (Μονάδες 13)

58.

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς $A\Gamma$, τέτοιο ώστε $B\Delta=B\Gamma$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{\Delta B\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$. (Μονάδες 13)



59.

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $DE \perp B\Gamma$.

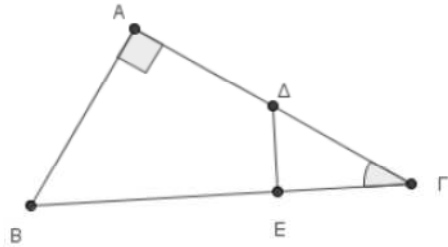
Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου $ADEB$.

(Μονάδες 15)



60.

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$.

Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) τη γωνία $\widehat{\Delta A\Gamma}$.

(Μονάδες 15)

61.

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω ότι η AD είναι η διχοτόμος της γωνίας A και η $DE \parallel AB$. Αν η γωνία $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$,

α) να υπολογίσετε:

I. τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

II. τις γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$.

(Μονάδες 10)

β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

