

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

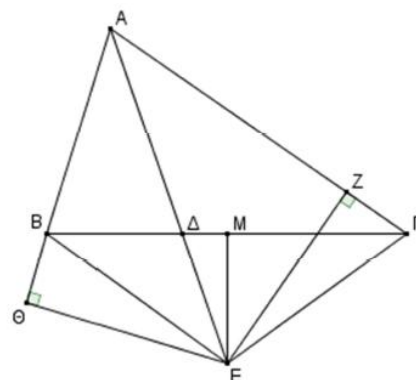
(1η) επαναληπτική εργασία

4ο ΘΕΜΑ

1.

Στο τρίγωνο ABΓ του παρακάτω σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ, Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ, ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

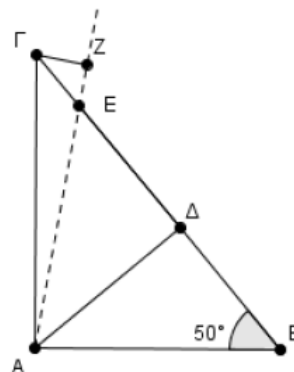
- Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)
- Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
- $\hat{A}\Gamma\epsilon + \hat{A}\beta\epsilon = 180^\circ$ (Μονάδες 12)



2.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 50^\circ$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε ΔΕ=ΒΔ. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

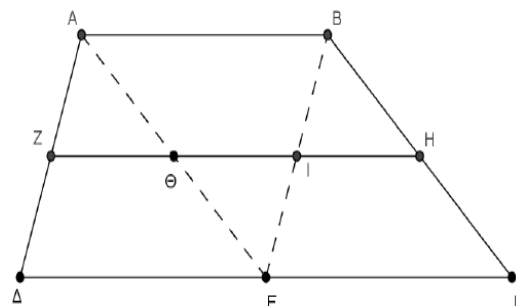
- Να αποδείξετε ότι:
 - Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
 - $\hat{\Gamma}\hat{A}\epsilon = 10^\circ$. (Μονάδες 10)
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ. (Μονάδες 9)



3.

Σε τραπέζιο ABΓΔ (AB//ΓΔ) είναι ΓΔ= 2AB. Επίσης τα Ζ, Η, Ε είναι τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ, ΒΕ στα σημεία Θ, Ι αντίστοιχα.

- Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο ABΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)
- Να δείξετε ότι, τα σημεία Θ, Ι είναι μέσα των ΑΕ, ΒΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)
- Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2} AB$. (Μονάδες 10)



4. (εγγεγραμμένο τετράπλευρο)

Δίνεται κύκλος με κέντρο O , και έστω AB μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔB (προς το B) θεωρούμε σημείο E ώστε $BE=AD$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $\Delta D\Gamma$ και $B E\Gamma$ είναι ίσα.

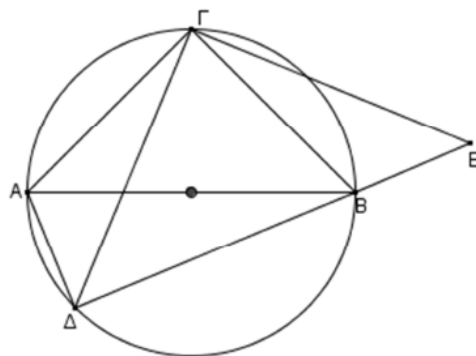
(Μονάδες 8)

ii. Η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην ΓE .

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ , η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου.

(Μονάδες 9)



5.

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και έστω AD ύψος και BE διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = 60^\circ$ και $AZ=BZ$.

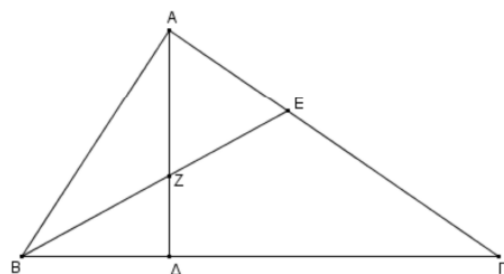
(Μονάδες 10)

ii. $AD = \frac{3}{2}BZ$

(Μονάδες 8)

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)



6.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο σημείο H και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $MD=ME$

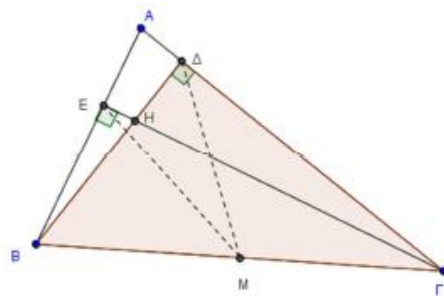
(Μονάδες 10)

ii. Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$ και ότι $\hat{A}H\Delta = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το ορθόκентρο του τριγώνου ABH .

(Μονάδες 10)



7.

Δύο κύκλοι (K, ρ) , (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία A , B . Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{AB\Gamma} = 90^\circ$

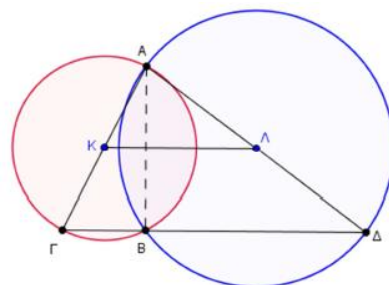
(Μονάδες 5)

β) τα σημεία Γ , B , Δ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

γ) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία $K, \Lambda, \Gamma, \Delta$ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



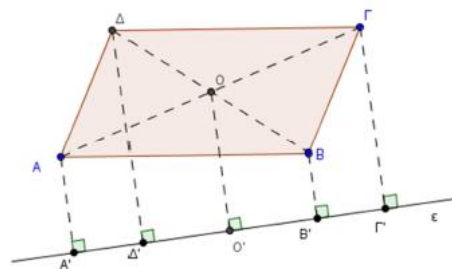
8.

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τις προβολές A', B', Γ', Δ' των κορυφών του A, B, Γ, Δ αντίστοιχα, σε μια ευθεία ϵ .

α) Αν η ευθεία ϵ αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA'=3, BB'=2, \Gamma\Gamma'=5$, τότε:

- Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ϵ είναι ίση με 4. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$. (Μονάδες 9)

β) Αν η ευθεία ϵ διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (Μονάδες 8)

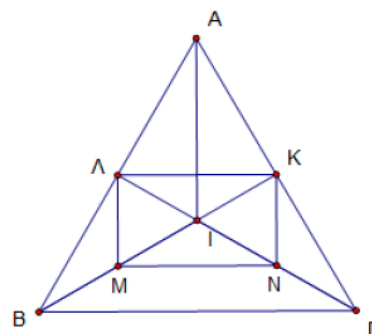


9.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$, τα οποία τέμνονται στο I .

Αν M και N τα μέσα των BI και ΓI αντίστοιχα, να αποδείξετε:

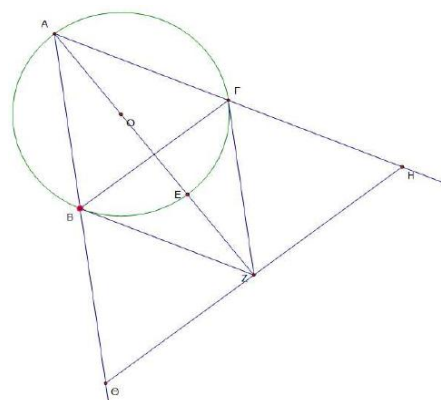
- Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές (Μονάδες 5)
- Τα τρίγωνα $B\Lambda I$ και $\Gamma I K$ είναι ίσα (Μονάδες 5)
- Το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 5)
- Το τετράπλευρο $M\Lambda K N$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



10. (γωνία χορδής και εφαπτομένης)

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ . Τα τμήματα ΓZ και BZ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και B αντίστοιχα. Αν το τμήμα OH είναι κάθετο στο τμήμα AZ στο Z , να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο $ZB\Gamma$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)
- Το τετράπλευρο $A\Gamma Z B$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)
- Το τετράπλευρο $B\Gamma H O$ είναι τραπέζιο, με $B\Theta = BZ$ και $\Theta H = 2B\Gamma$. (Μονάδες 10)



11.

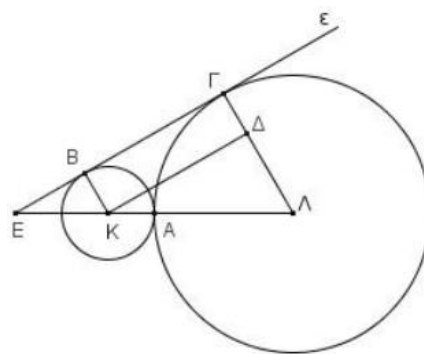
Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μία ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΚΛ είναι 30° . (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα $ΕΛ=6\rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (K, ρ) .

(Μονάδες 8)



12.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $DE \perp BG$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ.

(Μονάδες 8)

δ) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 7)

13.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($AB < AG$) και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές.

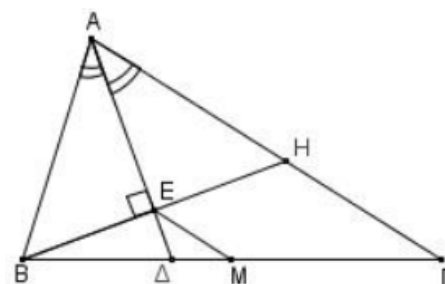
(Μονάδες 9)

β) $EM \parallel HG$

(Μονάδες 8)

γ) $EM = (AG - AB)/2$

(Μονάδες 8)



14.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

(Μονάδες 9)