

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

(2η) επαναληπτική εργασία

4^ο ΘΕΜΑ

15.

Δίνεται τραπέζιο $ABΓΔ$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $ΔΓ = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το B φέρνουμε κάθετη στη $ΓΔ$ που τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο K και την $ΓΔ$ στο E . Επίσης φέρνουμε την $ΑΕ$ που τέμνει τη $ΒΔ$ στο σημείο Λ .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$

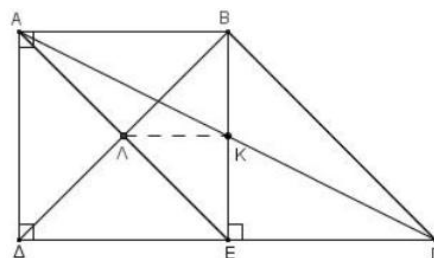
(Μονάδες 8)

β) $ΒΔ = ΑΕ$

(Μονάδες 9)

γ) $ΚΛ = \frac{1}{4} ΔΓ$.

(Μονάδες 8)



16.

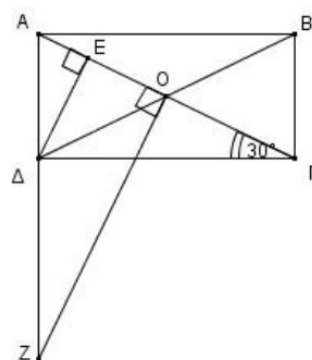
Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ είναι $\hat{\Delta Γ A} = 30^\circ$ και O το κέντρο του. Φέρνουμε $ΔΕ \perp ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A Δ Γ}$ χωρίζεται από τη $ΔΕ$ και τη διαγώνιο $ΔΒ$ σε τρεις ίσες γωνίες.

(Μονάδες 13)

β) Φέρνουμε κάθετη στην $ΑΓ$ στο σημείο O η οποία τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ στο Z . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AZO και $ΑΒΓ$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)



17.

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$. Προεκτείνουμε το ύψος του AH κατά τμήμα $HΔ = AH$ και τη διάμεσό του AM κατά τμήμα $ME = AM$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = BD = ΓΕ$

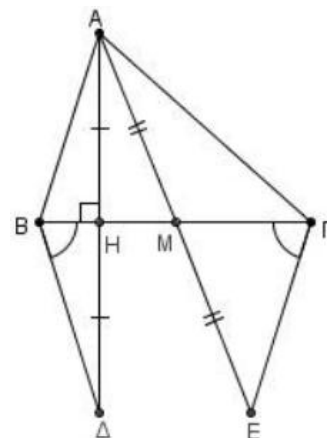
(Μονάδες 8)

β) $\hat{ΓΒΔ} = \hat{BΓΕ}$

(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 9)

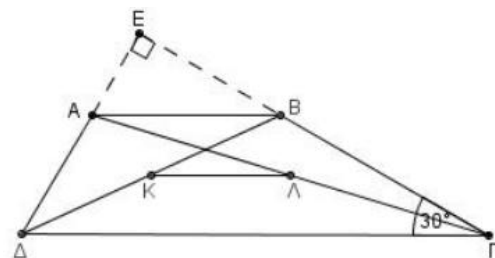


18.

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω K, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνονται τέμνοντας κάθετα στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

- α) $AB=2AE$ (Μονάδες 10)
 β) $K\Lambda=AD$ (Μονάδες 10)
 γ) Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

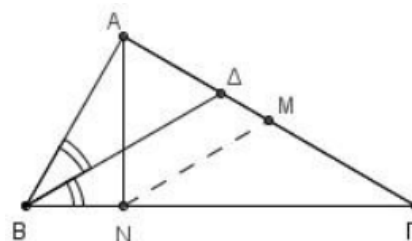


19.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, και η διχοτόμος $B\Delta$ της γωνίας $\hat{B}$. Από το μέσο M της $A\Gamma$ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο $B\Delta$ που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο N .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)
 α) Το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
 β) $AN \perp B\Gamma$ (Μονάδες 10)

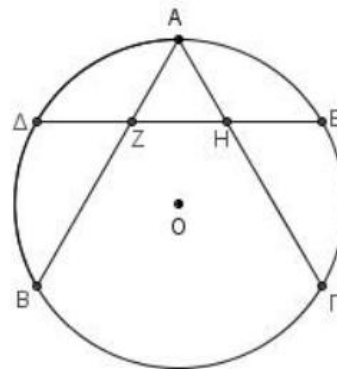


20. (σχέσεις εγγεγραμμένων γωνιών με αντίστοιχα τόξα)

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τα ίσα τόξα AB και $A\Gamma$, το καθένα ίσο με 120° . Έστω Δ και E τα μέσα των τόξων AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)
 β) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και AHE είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους. (Μονάδες 10)
 γ) Η χορδή ΔE τριχοτομείται από τις χορδές AB και $A\Gamma$. (Μονάδες 7)

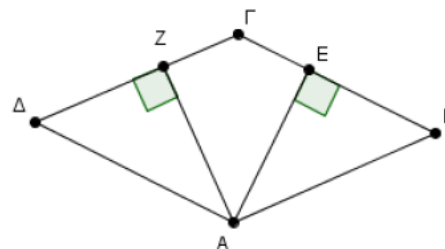


21.

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
 β) Η ευθεία $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ZE . (Μονάδες 9)
 γ) Αν M και N τα μέσα των πλευρών AD και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZMNE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)



22.

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) φέρουμε τις διαμέσους BD και GE . Μία ευθεία ϵ παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και AG στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους BD και GE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ=GH$.

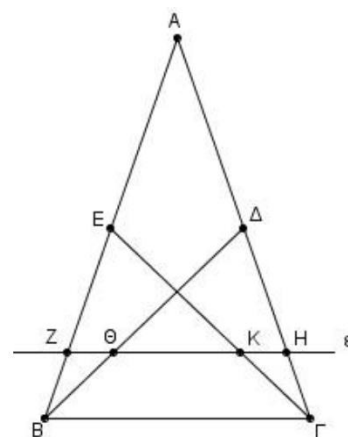
(Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) $ZK=H\Theta$.

(Μονάδες 8)



23.

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα.

(Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

24.

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος OD . Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE , που τέμνει το τμήμα AO στο Z .

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και ϕ του παρακάτω σχήματος είναι ίσες.

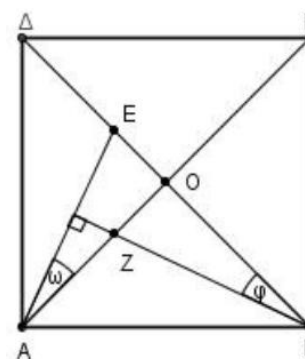
(Μονάδες 6)

β) $BZ=AE$ και $\Gamma Z=BE$

(Μονάδες 12)

γ) Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB .

(Μονάδες 7)



25.

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα $BN=AB$ και την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma M=AN$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Delta N=\Delta M$

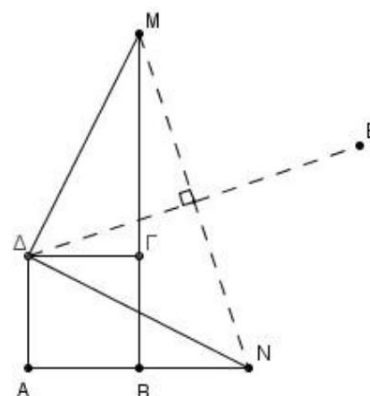
(Μονάδες 7)

ii. $\Delta N \perp \Delta M$

(Μονάδες 10)

β) Αν E το συμμετρικό σημείο του Δ ως προς την ευθεία MN , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔMEN είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 8)



26.

Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α, Δ και Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

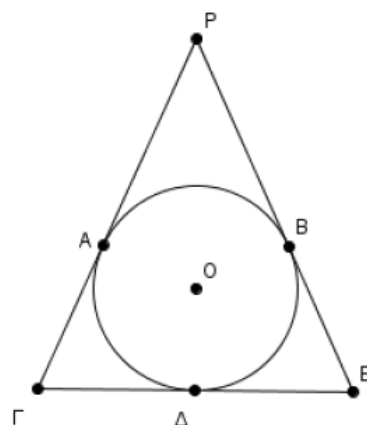
1. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$ (Μονάδες 6)

11. $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$ (Μονάδες 8)

β) Αν $ΑΓ=ΒΕ$, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

II. Τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)



27.

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) $\Gamma A = \Delta B$. (Μονάδες 8)

γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με $PA + PB$. (Μονάδες 7)

28.

Από σημείο M εξωτερικό κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA και MB του κύκλου. Αν Γ είναι το συμμετρικό σημείο του κέντρου O ως προς την MB , να αποδείξετε ότι:

α) $MA=MB=MF$ (Μονάδες 9)

β) η γωνία $\widehat{AM\Gamma}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\widehat{BM\Gamma}$. (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο AMBO είναι εγγράψιμο σε κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο του κύκλου. (Μονάδες 7)

