

ΛΥΚΕΙΟ

ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

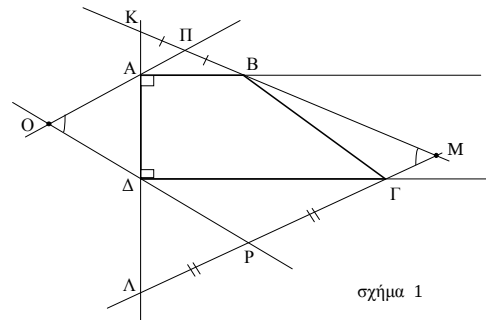
Α' Λυκείου

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 5ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 3

ΤΡΑΠΕΖΙΑ
ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο στο οποίο $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Θεωρούμε σημείο M της ταινίας των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ δηλαδή κοινό σημείο των ημιεπιπέδων (AB, Γ) και $(\Gamma\Delta, A)$ (σχήμα 1) εκτός του τραpezίου και τις ευθείες $MB, M\Gamma$ που τέμνουν την AD στα σημεία K, Λ αντίστοιχα. Έστω επίσης Π, P τα μέσα των $KB, \Gamma\Lambda$ αντίστοιχα. Αν O το σημείο τομής των $AP, \Delta P$ τότε να δείξετε ότι : $\hat{\Pi O P} = \hat{\Pi M P}$.

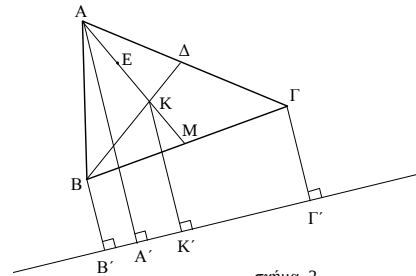


σχήμα 1

2. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η βάση AB είναι ίση με το άθροισμα των μη παράλληλων πλευρών AD και $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ τέμνονται σε σημείο της πλευράς AB .

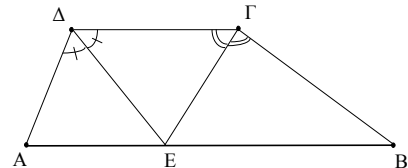
3. Ευθεία ε αφήνει τις κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ προς το ίδιο μέρος της. Αν A', B', Γ', K' , είναι οι προβολές των κορυφών A, B, Γ και του κέντρου βάρους K πάνω στην ε αντίστοιχα (σχήμα 2), τότε να δείξετε ότι

$$AA' + BB' + \Gamma\Gamma' = 3KK'.$$



σχήμα 2

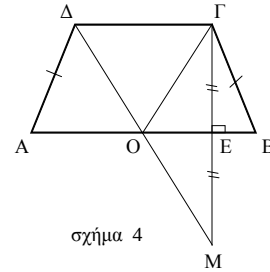
4. Τέσσερα χωριά A, B, Γ, Δ αποτελούν κορυφές ενός τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ (σχήμα 3) και $AB = AD + B\Gamma$. Οι τεχνικοί της εταιρίας υδάτων θέλουν να ενώσουν το χωριό Δ με τον κεντρικό αγωγό νερού AB . Πάνω στη διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας Δ τοποθέτησαν ευθύγραμμο σωλήνα, ο οποίος ενώθηκε με τον αγωγό AB στο σημείο E . Από το E τοποθέτησαν άλλον ευθύγραμμο σωλήνα και ένωσαν το χωριό Γ . Να αποδείξετε ότι :



σχήμα 3

- α) $AD = AE$
β) ο σωλήνας $E\Gamma$ βρίσκεται πάνω στη διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας Γ .

5. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και M να είναι το συμμετρικό σημείο του Γ ως προς την AB (σχήμα 4). Αν O είναι το σημείο τομής των $M\Delta$ και AB , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.



6. Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου AB . Στην AB θεωρούμε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $A\Gamma = B\Delta$ και από αυτά φέρνουμε δύο παράλληλες που τέμνουν το ημικύκλιο στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τμήμα EZ είναι κάθετο στις $E\Gamma$ και $Z\Delta$.

7. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ οι διάμεσοί του. Να αποδείξετε ότι :

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma > \frac{3}{4}(\alpha + \beta + \gamma)$$

8. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$ να δείξετε ότι $\beta = \gamma$ και αντιστρόφως.

9. Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > \Gamma\Delta$ και τα μέσα E, Z των διαγωνίων του $A\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι κάθετες από τα E, Z προς τις πλευρές $AD, B\Gamma$ αντίστοιχα και η μεσοκάθετος της πλευράς AB συντρέχουν δηλ. διέρχονται από κοινό σημείο.

10. Προεκτείνουμε το ύψος BD τριγώνου $AB\Gamma$ κατά $BE = BD$. Αν M είναι το μέσο του τμήματος $\Gamma\Delta$, να δείχθεί ότι η κάθετη από το M στην AB και η κάθετη από το A στην $E\Gamma$ τέμνονται σε σημείο της BD .

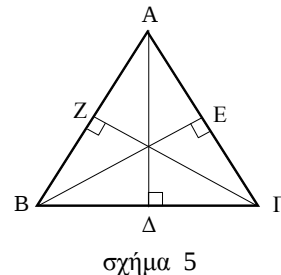
11. Στο ισόπλευρο τρίγωνο του σχήματος 5 $AD, BE, \Gamma Z$ είναι τα ύψη και K το ορθόκεντρό του.

α) Αν $KZ = 2$, τότε το μήκος του $K\Gamma$ είναι :

I : $\frac{4}{3}$ II : 1 III : 4 IV : 3

β) Αν $KZ = 2$, τότε το μήκος του $K\Delta$ είναι :

I : 2 II : $\frac{1}{2}$ III : 4 IV : $\frac{2}{3}$



Σε κάθε περίπτωση να επιλέξετε τη σωστή απάντηση την οποία να αιτιολογήσετε.

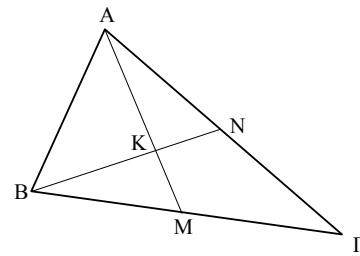
12. Στο τρίγωνο του σχήματος 6 οι AM και BN είναι διάμεσοι. Ποιά από τις επόμενες σχέσεις είναι σωστή ;

$$I : KM = \frac{2}{3} AM$$

$$I : BN = 2 \cdot BK$$

$$III : KN = \frac{1}{2} BK$$

$$IV : AK = \frac{2}{3} BN$$



σχήμα 6

13. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και πλευρές α, β, γ θεωρούμε τον εγγεγραμμένο κύκλο (I, ρ). Να αποδείξετε ότι $\rho = \tau - \alpha$, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου ABΓ.

14. Έστω τραπέζιο ABΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 2\Gamma\Delta$, E να είναι το σημείο τομής των AD και BΓ και M το μέσο της AB. Να αποδείξετε ότι :

α) $E\Gamma = \Gamma B$,

β) οι EM και ΓΔ διχοτομούνται,

γ) οι διαγώνιες του ABΓΔ τέμνονται πάνω στην EM.