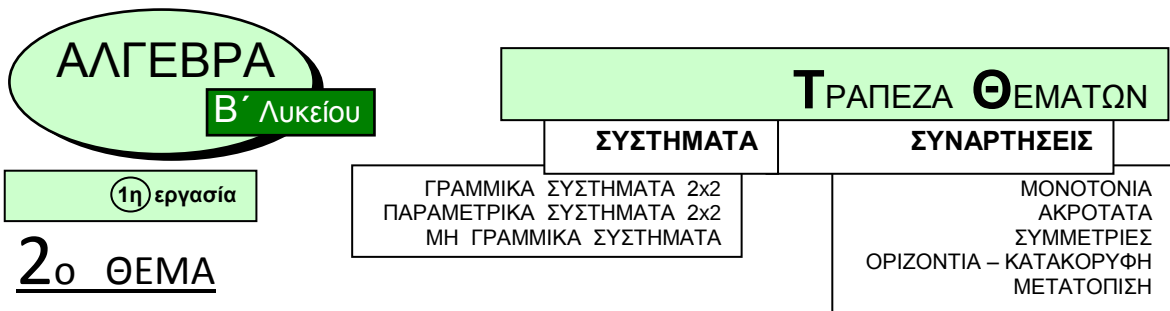


ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ



1.

α) Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο.
(Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.
(Μονάδες 15)

2.

Δίνεται η εξίσωση: $8x + 2y = 7$ (1)

α) Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).
(Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.
(Μονάδες 15)

3.

Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 13)

β) Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.
(Μονάδες 12)

4.

Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(5,2)$ και $B(4,9)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.
(Μονάδες 12)

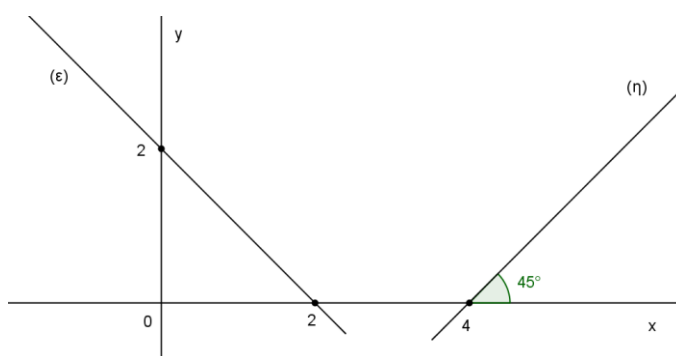
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(5-3x) < 2$.
(Μονάδες 13)

5.

α) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η). (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

(Μονάδες 13)



6.

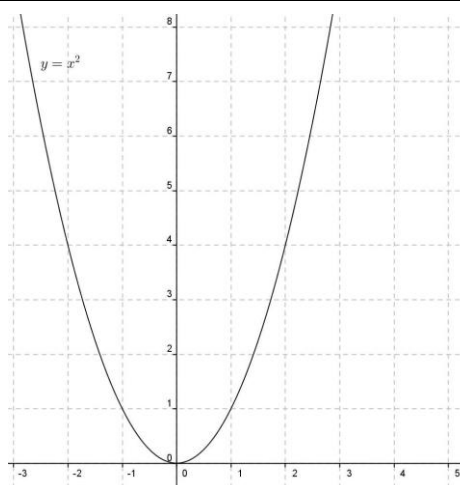
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 12)

β) Στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$

(Μονάδες 13)



7.

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ ax + \beta y = \gamma \end{cases} \quad \text{με παραμέτρους } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2, -3)$.

(Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο.

(Μονάδες 12)

8.

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος x cm, πλάτος y cm, περίμετρο ίση με 38 cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων x, y του ορθογωνίου.

(Μονάδες 15)

9.

Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2.700.

- α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.
(Μονάδες 13)
- β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων.
(Μονάδες 12)

10.

- α) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

(Μονάδες 15)
- β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α).
(Μονάδες 10)

11.

- Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases}$$
, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Αν $\lambda = -3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση.
(Μονάδες 8)
- β) Αν $\lambda = 3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
(Μονάδες 8)
- γ) Αν $\lambda = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.
(Μονάδες 9)

12.

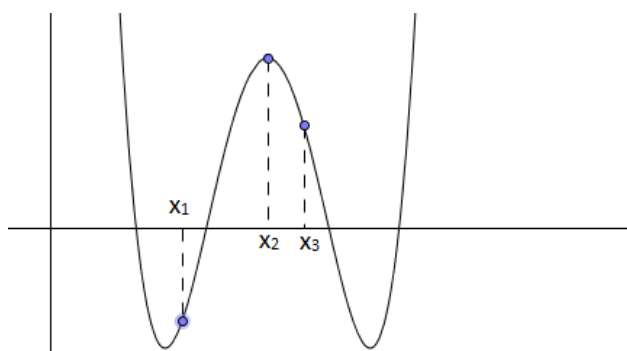
- Δίνεται η συνάρτηση, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να δείξετε ότι η $f(x) \leq 1$.
(Μονάδες 8)
- β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 8)
- γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.
(Μονάδες 9)

13.

- Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $(\varepsilon_1): 2x - y = -1$, $(\varepsilon_2): (\lambda - 1)x - y = 6$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$
- α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι παράλληλες.
(Μονάδες 8)
- β) Να παραστήσετε γραφικά τις ε_1 και ε_2 , για $\lambda = 3$.
(Μονάδες 8)
- γ) Υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να ταυτίζονται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 9)

14.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:



α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_1)$, $f(x_2)$ και $f(x_3)$.

(Μονάδες 10)

β) Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

15.

Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1 : 2x + y = 5$, $\epsilon_2 : -2x + 3y = -9$ και $\epsilon_3 : 3x + 2y = 7$.

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ϵ_1 και ϵ_2 .

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ϵ_1 και ϵ_3 .

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να δείξετε ότι το κοινό σημείο των ϵ_2 και ϵ_3 είναι σημείο της ϵ_1 .

(Μονάδες 13)

16.

Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα. Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα.

α) Αν x ο αριθμός σειρών του κάτω και y ο αριθμός σειρών του πάνω διαζώματος, να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων.

(Μονάδες 12)

β) Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διάζωμα;

(Μονάδες 13)

17.

Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(4,5)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f .

(Μονάδες 13)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 , να δείξετε ότι $f(0) > 0$.

(Μονάδες 12)

18.

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -3$

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του a , η ευθεία $3x + ay = a + 5$ διέρχεται από το M .

(Μονάδες 12)

19.

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.

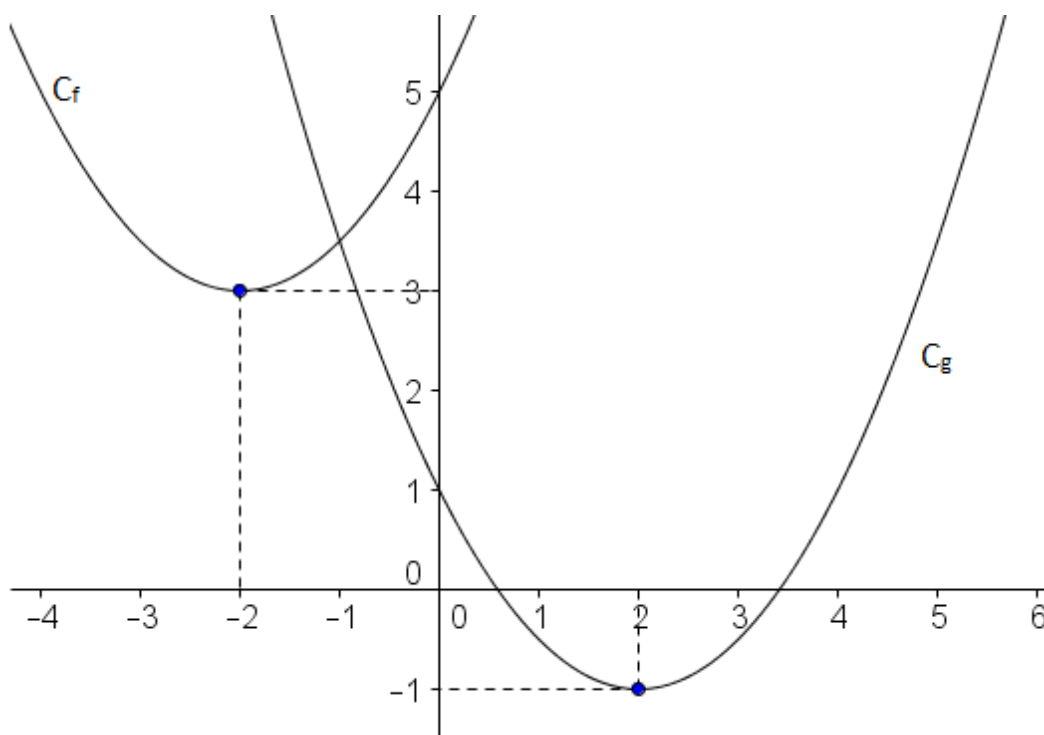
Παρατηρώντας το σχήμα:

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g .

(Μονάδες 15)



20.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$.

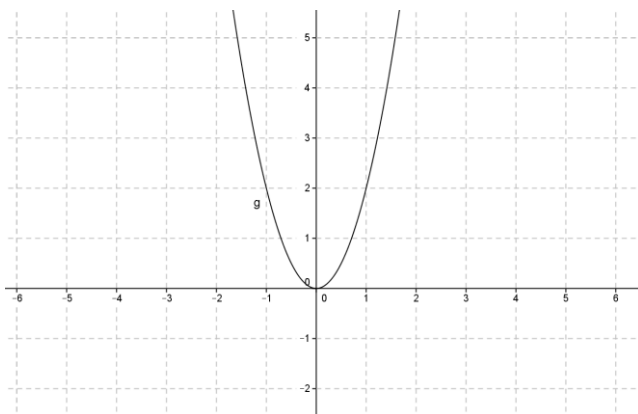
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή: $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$.

(Μονάδες 10)

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = 2x^2.$$

Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g .



(Μονάδες 15)

21.

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} x - 2y = 9 \\ ax + \beta y = \gamma \end{cases} \quad \text{με παραμέτρους } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ , ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(1, -4)$.

(Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ , ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

(Μονάδες 12)

22.

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ ax + \beta y = \gamma \end{cases} \quad \text{με παραμέτρους } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ , ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(-1, 5)$.

(Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ , ώστε το σύστημα αυτό να έχει άπειρες λύσεις και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

(Μονάδες 12)