



(1η) επαναληπτική εργασία

2ο – 3ο – 4ο ΘΕΜΑ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

**ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ
ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

1. (2ο/2015)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

B1. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντες τα πολυώνυμα $x - 1$ και $x - 2$, να υπολογίσετε τα α, β .

Μονάδες 15

B2. Αν $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 10

2. (3ο/2015)

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$.

Γ1. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

Μονάδες 8

Γ2. Δείξτε ότι $A = 1 + \sigma\upsilon\nu x$, για $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Μονάδες 8

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 9

3. (4ο/2015)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \left(\frac{e^x - e}{e^x + e} \right)$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 8

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \ln 2 = 0$.

Μονάδες 10

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = [-f(\lambda)]^x$, με $\lambda > 1$.

Δ3. Να υπολογίσετε τις τιμές του λ , με $\lambda > 1$, ώστε η συνάρτηση g να είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

4. (2ο/2005)

Να λύσετε την επόμενη εξίσωση : $2\log x + \log(x - 1) = \log(40x - 40) - 1$

Μονάδες 25

5. (3ο/2005)

Δίνεται η εξίσωση : $5\eta\mu^2\alpha - 13\eta\mu\alpha + 6 = 0$, με $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

α. Να δείξετε ότι $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{4}{5}$

10 Μονάδες

β. Να υπολογίσετε το $\eta\mu 2\alpha$ και κατόπιν το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

10 Μονάδες

γ. Να υπολογίσετε το $\eta\mu 3\alpha$.

5 Μονάδες

6. (4ο/2005)

Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4x^2 + \alpha x + \beta$ έχει παράγοντες τους $x - 1$ και $x - 2$.

α. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β .

Μονάδες 10

β. Για $\alpha = 5$ και $\beta = -2$,

i) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$,

Μονάδες 10

ii) να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με

$$f(x) = \sqrt{P(x)}$$

Μονάδες 5

7. (4ο/2012)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right)$.

Δ1. Βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

Μονάδες 10

Δ2. Λύστε την εξίσωση $f(x) = \ln 2$

Μονάδες 8

Δ3. Λύστε την ανίσωση $f(x) < 0$.

Μονάδες 7

8. (3ο/2012)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 3$.

Γ1. Να βρεθούν τα α, β ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $(x + 1)^2$.

Μονάδες 13

Γ2. Αν $\alpha = -1$ και $\beta = -5$ να λυθεί η ανίσωση: $P(x) < 0$.

Μονάδες 12

9. (3ο/2010)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 18$.

- Γ1.** Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε το $P(x)$ να έχει ρίζα τον αριθμό -3 και η διαίρεση του $P(x)$ με το $x - 2$ να αφήνει υπόλοιπο -20 .

Μονάδες 10

- Γ2.** Για $\alpha = -2$ και $\beta = -9$, να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 5

- Γ3.** Αν επιπλέον είναι $Q(x) = (x - 1)^{2010} \cdot P(x)$, με $\alpha = -2$ και $\beta = -9$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt{Q(x)}$.

Μονάδες 10

10. (4ο/2010)

Δίνεται η εκθετική συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{2\alpha + 3}{\alpha - 2}\right)^x$, με $\alpha \neq 2$.

- Δ1.** Να βρείτε τις τιμές του α , με $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f να ορίζεται σ' όλο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

- Δ2.** Για $\alpha = 9$ να λυθεί η ανίσωση $f(2x) < (\sqrt{3})^{x^3 - 3x + 6}$.

Μονάδες 8

- Δ3.** Αν για $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ ισχύει $f(x^2 - 5x + 2010) < f(2004)$ να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου α .

Μονάδες 10

11. (3ο/2016)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^3 + \mu x^2 - 8x - 4\mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- Γ1.** Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ αν το $x+2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x+1)$ είναι 3.

Μονάδες 10

- Γ2.** Για $\lambda = 2$ και $\mu = 1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 5

- Γ3.** Να λύσετε την εξίσωση

$$2\eta\mu x(\eta\mu^2 x - 4) = 3 + \sigma\nu\nu^2 x$$

Μονάδες 5

- Γ4** Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{x^3 - 2}{8 - x} \geq \frac{x}{2}$$

Μονάδες 5

12. (4ο/2016)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ και $g(x) = \ln(2 + 3e^{-x})$.

Δ1. Δείξτε ότι τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι $A_f = (0, +\infty)$ και $A_g = \mathbb{R}$ αντίστοιχα. **Μονάδες 2+2=4**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 6**

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $3^{f^2(x)-2} - \frac{1}{3} = 0$ **Μονάδες 8**

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \leq \ln 2 + g(x)$ **Μονάδες 7**

13. (3ο/2014)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Γ1. Να γίνει η διαίρεση $P(x) : (x - 3)$, (8 μονάδες) και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης. (4 μονάδες) **Μονάδες 12**

Γ2. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$. **Μονάδες 7**

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu^3 x - 2\eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + 6 = 0$. **Μονάδες 6**

14. (4ο/2014)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . **Μονάδες 6**

Δ2. Να δείξετε ότι $f(2) + 3f(1) - f(3) = \ln 4$. **Μονάδες 10**

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = \ln(e^x - 1)$.

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση : $\ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \ln 3 + g(x)$. **Μονάδες 9**

15. (2ο/2014 επαναληπτικές)

Δίνεται η εξίσωση : $\eta\mu^2 \frac{\pi x}{2e} - 2\eta\mu \frac{\pi x}{2e} + 1 = 0$. (1)

B1. Να δείξετε ότι η λύση της εξίσωσης (1) είναι $x = e \cdot (4k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **Μονάδες 15**

B2. Αν x_0 είναι η λύση της (1) για $k = 0$ και x_1 είναι η λύση της (1) για $k = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $B = \ln(x_0 \cdot x_1) - \ln 5$. **Μονάδες 10**