



Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 2

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $\eta\mu x = -\frac{2}{3}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.
2. Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.
3. Αν $\epsilon\phi x = \frac{4}{3}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.
4. Αν $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.
5. Αν $\sigma\phi x = -\frac{2}{3}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.
6. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad όταν :
$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ και } 8\eta\mu x = 5(1 - \eta\mu x)$$
7. Ομοίως όταν : $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ και $10\epsilon\phi x = 8(1 + \epsilon\phi x)$.

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Για κάθε γωνία ή τόξο ω ισχύει :

- $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$
- $\epsilon\phi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega}$
- $\sigma\phi \omega = \frac{\sigma\upsilon\nu \omega}{\eta\mu \omega}$
- $\epsilon\phi \omega \cdot \sigma\phi \omega = 1$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Από τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες μπορούμε να παράγουμε άλλους τύπους, όπως :

- αν γνωρίζουμε το **συνω** μιας γωνίας και ζητάμε το **ημω** :
$$\eta\mu \omega = \pm \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 \omega}$$
- αν γνωρίζουμε το **ημω** μιας γωνίας και ζητάμε το **συνω** :
$$\sigma\upsilon\nu \omega = \pm \sqrt{1 - \eta\mu^2 \omega}$$

(το πρόσημο σε κάθε περίπτωση καθορίζεται από το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει η γωνία ω)
- αν γνωρίζουμε την **εφω** μιας γωνίας και ζητάμε το **ημω** :
$$\eta\mu^2 \omega = \frac{\epsilon\phi^2 \omega}{1 + \epsilon\phi^2 \omega}$$

16. α) Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, δείξτε ότι υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε : $\eta\mu\omega = \beta$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \alpha$.

β) Να προσδιορισθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει γωνία ω για την οποία να ισχύει :

ι) $\eta\mu\omega = 2\kappa - 1$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \kappa$

ιι) $\eta\mu\omega = \frac{\kappa}{\kappa - 3}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\kappa - 2}{\kappa - 3}$.

17. Αν ισχύει $x = 3\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = -7\eta\mu\theta$, δείξτε ότι : $49x^2 + 9y^2 = 441$.

18. α) Αν ισχύει $x = \alpha\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = \beta\eta\mu\theta$, $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι : $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

β) Αν $x = \frac{\alpha}{\eta\mu\theta}$ και $y = \beta\sigma\phi\theta$, $\alpha, \beta > 0$, να βρείτε μια σχέση που να συνδέει τα x, y, α, β και να είναι ανεξάρτητη της γωνίας θ .

19. Αν $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1 = \lambda$, να υπολογίσετε με τη βοήθεια του λ τις παραστάσεις :

α) $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

β) $\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x$

γ) $\eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x$

δ) $\eta\mu x \cdot \epsilon\phi x + \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\phi x$

20. Να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \epsilon\phi x + \sigma\phi x$.

21. Να δείξετε ότι : $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 + (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2$.

22. Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{1}{\eta\mu^2 \alpha} - \frac{1}{\epsilon\phi^2 \alpha} = 1$

β) $\frac{1 - \eta\mu \alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu \alpha}{1 + \eta\mu \alpha}$

γ) $\eta\mu^4 \alpha - \sigma\upsilon\nu^4 \alpha = \eta\mu^2 \alpha - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha$

δ) $\frac{\eta\mu \alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha \cdot \epsilon\phi^2 \alpha} = \sigma\phi \alpha$

ε) $\frac{1 + \epsilon\phi \alpha}{1 + \sigma\phi \alpha} = \epsilon\phi \alpha$

στ) $\epsilon\phi \alpha + \epsilon\phi \beta = \epsilon\phi \alpha \cdot \epsilon\phi \beta (\sigma\phi \alpha + \sigma\phi \beta)$

ζ) $\frac{1 - \epsilon\phi^2 x}{1 + \epsilon\phi^2 x} = 1 - 2\eta\mu^2 x$

23. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\varphi\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha}$$

$$\beta) \frac{\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - 1}{\varepsilon\varphi\alpha + 1}$$

$$\gamma) \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha} = 1 + \eta\mu\alpha$$

$$\delta) \frac{1 - 2\eta\mu^2\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1} = 1$$

24. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{\eta\mu\chi}{1 - \sigma\upsilon\nu\chi} - \frac{1}{\varepsilon\varphi\chi} = \frac{1}{\eta\mu\chi}$$

$$\beta) \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1 - \eta\mu\chi} - \frac{1}{\sigma\varphi\chi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$$

25. Να δείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\chi} + \frac{1}{1 + \sigma\varphi^2\chi} = 1$$

$$\beta) \frac{\varepsilon\varphi^2\chi - 1}{\varepsilon\varphi^2\chi + 1} + \frac{\sigma\varphi^2\chi - 1}{\sigma\varphi^2\chi + 1} = 0$$

26. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{|\eta\mu\alpha|}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}$$

$$\beta) \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{|\eta\mu\alpha|}$$

27. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) |\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi| \leq \sqrt{2}$$

$$\beta) \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi \leq \frac{1}{2}$$

$$\gamma) \varepsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\chi \geq 2, \text{ όταν } 0 < \chi < \frac{\pi}{2}$$

$$\delta) 2\eta\mu^2\chi - 3\eta\mu\chi + 3 > 0$$

28. Να λυθεί η εξίσωση : $\chi^2 - (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)\chi + \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = 0$.

29. Να λύσετε την εξίσωση : $\chi^2 - 2\chi + \eta\mu^2\theta = 0$.

30. Να δείξετε ότι είναι ανεξάρτητη του χ η παράσταση : $A = \eta\mu^2\chi + \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\chi}$.

31. α) Να δείξετε ότι : ι) $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x$

ιι) $\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x = 1 - 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x$

β) Δείξτε ότι είναι ανεξάρτητη του x η παράσταση :

$$A = 3(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) - 2(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x)$$

32. Αν $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\beta}$, δείξτε ότι : $\sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\beta = (\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)^2$

33. Αν η εξίσωση : $x^2 - (\epsilon\varphi^2\theta - \eta\mu^2\theta)x + \epsilon\varphi^2\theta\eta\mu^2\theta = 0$, έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 δείξτε ότι :

$$2(\rho_1 + \rho_2) + \rho_1\rho_2 > 0$$

34. Να σημειώσετε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιές όχι.

α) Αν $\eta\mu x = \frac{1}{2}$, τότε $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

β) Για κάθε x είναι $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$.

γ) Για κάθε x είναι $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1$.

δ) Αν $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, είναι $\eta\mu x = -\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}$.

ε) Η ισότητα $\epsilon\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$ ισχύει για κάθε γωνία x .

στ) Για κάθε γωνία x ισχύει $\sqrt{\eta\mu^2 x} = |\eta\mu x|$.

ζ) Για κάθε γωνία x ισχύει $\sqrt{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = 1 + \sigma\upsilon\nu x$.

35. Η παράσταση $(\alpha\eta\mu\theta + \beta\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (\beta\eta\mu\theta - \alpha\sigma\upsilon\nu\theta)^2$ είναι ίση με :

α) $A : \alpha^2 - \beta^2$

β) $B : \alpha + \beta$

γ) $\Gamma : \alpha^2 + \beta^2$

δ) $\Delta : (\alpha + \beta)^2$

ε) $E : \text{κανένα από τα προηγούμενα.}$

36. Αν ο λόγος του $\eta\mu\theta$ προς το $\sigma\upsilon\nu\theta$ είναι $\frac{1}{2}$, τότε ο λόγος της $\epsilon\varphi\theta$ προς την $\sigma\varphi\theta$ είναι ίσος με :

α) $\frac{1}{4}$

β) $\frac{1}{2}$

γ) 1

δ) 2

ε) 4