



Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 3

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών :

α) 1950° β) -1215° γ) -2280°

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών

α) 120° β) 135° γ) 150°
 δ) 210° ε) 225° στ) 240°
 ζ) 300° η) 315° θ) 330°

3. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών

α) $-\frac{38\pi}{3}$ β) $\frac{25\pi}{4}$ γ) $-\frac{55\pi}{6}$
 δ) $\frac{5\pi}{6}$ ε) $\frac{56\pi}{3}$ στ) $-\frac{89\pi}{3}$

4. Να υπολογίσετε με τη βοήθεια της γωνίας ω , τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς :

α) $\eta\mu(\omega - 90^\circ)$ β) $\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega)$
 γ) $\eta\mu(270^\circ - \omega)$ δ) $\epsilon\phi(270^\circ + \omega)$

5. Να εκφράσετε με τη βοήθεια της γωνίας θ , τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών :

α) $\eta\mu(5\pi + \theta)$ β) $\sigma\upsilon\nu(\theta + 3\pi)$
 γ) $\epsilon\phi(-\theta - 5\pi)$

6. Να εκφράσετε με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας θ , τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών :

α) $\theta - \frac{5\pi}{2}$ β) $\theta + \frac{5\pi}{2}$ γ) $-\frac{3\pi}{2} - \theta$ δ) $3\pi - \theta$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Τύποι Αναγωγής στο 1ο Τεταρτημόριο :

Για παραπληρωματικά τόξα $(x, \pi - x)$:

- $\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$
- $\epsilon\phi(\pi - x) = -\epsilon\phi x$
- $\sigma\phi(\pi - x) = -\sigma\phi x$

Για τόξα με διαφορά π $(x, \pi + x)$:

- $\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$
- $\epsilon\phi(\pi + x) = \epsilon\phi x$
- $\sigma\phi(\pi + x) = \sigma\phi x$

Για αντίθετα τόξα $(x, -x)$:

- $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\epsilon\phi(-x) = -\epsilon\phi x$
- $\sigma\phi(-x) = -\sigma\phi x$

Για συμπληρωματικά τόξα $(x, \frac{\pi}{2} - x)$:

- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$
- $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\phi x$
- $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \epsilon\phi x$

7. Να αποδείξετε ότι :

α) $\eta\mu(90^\circ + \omega)\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega)\sigma\upsilon\nu\omega = 0$,

β) $\sigma\phi\omega + \epsilon\phi(180^\circ + \omega) + \epsilon\phi(90^\circ + \omega) + \epsilon\phi(360^\circ - \omega) = 0$.

8. Να αποδείξετε ότι :

α) $\eta\mu x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$,

β) $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) + \eta\mu(\pi - x) = 0$.

9. Να αποδείξετε ότι : α) $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi(-\omega) + \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2(-\omega) = 0$,

β) $\frac{\eta\mu(\pi - \theta) \cdot \sigma\phi(90^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta)}{\epsilon\phi(\pi + \theta) \cdot \epsilon\phi(90^\circ + \theta) \cdot \eta\mu\theta} + \eta\mu\theta = 0$.

10. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\sigma\phi(\pi + x) \cdot \eta\mu(2\pi - x) \cdot \eta\mu\left(\frac{13\pi}{2} + x\right)}{\sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \eta\mu(-x) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{17\pi}{2} + x\right)} = 1$.

11. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις : $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) \cdot \eta\mu(15\pi + x) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)}{\epsilon\phi\left(\frac{13\pi}{2} + x\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} + x\right)}$,

$$B = \frac{\eta\mu(\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \epsilon\phi(9\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(5\pi - x) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \epsilon\phi(10\pi + x)}$$

12. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις : α) $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \epsilon\phi(\pi + x)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \eta\mu(\pi - x) \cdot \epsilon\phi(\pi - x)}$

β) $B = \frac{\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\epsilon\phi(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + x)}$.

13. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

α) $\eta\mu(\pi + \alpha) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sigma\upsilon\nu(2\pi - \alpha) + \epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\beta) \sigma\phi(\alpha - 2\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + 2\pi) - 2\eta\mu(\alpha - \pi)$$

14. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \frac{\epsilon\phi(\pi - \theta) \cdot \sigma\phi(\pi + \theta) \cdot \epsilon\phi(-\theta) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\epsilon\phi(\pi + \theta) \cdot \sigma\phi(\pi - \theta) \cdot \sigma\phi\theta \cdot \epsilon\phi(2\pi - \theta)} = 1 ,$$

$$\beta) \frac{\eta\mu(\pi - \theta) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \eta\mu(2\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} = 1 ,$$

$$\gamma) \eta\mu(\theta - \pi) + \epsilon\phi(\theta - \pi) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \epsilon\phi\theta .$$

15. Να δείχθεί ότι : $\sigma\phi 1^\circ \cdot \sigma\phi 2^\circ \cdot \sigma\phi 3^\circ \dots \sigma\phi 89^\circ = 1$.

$$16. \text{ Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : } A = \frac{\eta\mu \frac{5\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{17\pi}{4}\right)}{\sigma\phi \frac{19\pi}{4} + \eta\mu \frac{11\pi}{2}} .$$

17. Αν $\epsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{\eta\mu(\pi + x) \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \epsilon\phi(-x)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

18. Αν $\eta\mu 12^\circ = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 78° .

19. Αν $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 72° .

20. Πόσες διαφορετικές τιμές παίρνει η παράσταση $\sigma\upsilon\nu \frac{2\lambda\pi}{3}$, όταν ο λ παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές.

21. Να δείξετε ότι έχει σταθερή τιμή η παράσταση :

$$A = 3\sigma\upsilon\nu^2(3\pi + x) + 2\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{13\pi}{2} - x\right)$$

22. Να αποδείξετε ότι είναι ανεξάρτητη του x η παράσταση :

$$A = \frac{\varepsilon\varphi(-5\pi + x)\varepsilon\varphi\left(-\frac{7\pi}{2} - x\right) + \eta\mu\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu(-x - 8\pi)}{\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)\eta\mu(-x - 3\pi)}$$

23. Αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{7} - x\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{14} + x\right) = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{7} - x\right) + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{5\pi}{14} + x\right)$$

24. Να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\eta\mu^2\left(\frac{11\pi}{2} - x\right)}{\sigma\upsilon\nu^2(x - 4\pi)} - \varepsilon\varphi^2(x - 11\pi) \cdot \eta\mu^2\left(-x - \frac{13\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu^2x .$$

25. Αν $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ δείξτε ότι :

$$\left[4\sigma\upsilon\nu(6\pi - x) + \frac{1}{\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)} \right]^2 \geq 6 .$$

26. Να αποδείξετε ότι :

$$1 + \frac{1}{2}[\eta\mu^2(7\pi - x) + \sigma\upsilon\nu^2(8\pi + y)] \geq \sigma\upsilon\nu(-x)\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) .$$

27. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι ισχύει :

α) $\eta\mu B = \eta\mu(A + \Gamma)$

β) $\eta\mu \frac{\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$

γ) $\eta\mu^2(A + B) + \eta\mu^2\Gamma = 0$

δ) $\sigma\upsilon\nu^2A + \eta\mu^2(B + \Gamma) = 1$

ε) $\sigma\varphi \frac{A+B}{2} \cdot \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} = 1$

στ) $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B+\Gamma}{2} = 1$

28. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

α) $\sigma\upsilon\nu B = -\sigma\upsilon\nu(A + \Gamma)$

β) $\eta\mu A = -\eta\mu(2A + B + \Gamma)$

γ) $\eta\mu A = -\sigma\upsilon\nu \frac{3A + B + \Gamma}{2}$

δ) $\sigma\upsilon\nu \Gamma = -\sigma\upsilon\nu(A + B + 2\Gamma)$

29. Αν A, B, Γ, Δ είναι οι κυρτές γωνίες σ'ένα τετράπλευρο, δείξτε ότι :

α) $\sigma\upsilon\nu(A + B) = \sigma\upsilon\nu(\Gamma + \Delta)$

β) $\varepsilon\varphi(A + B) = -\varepsilon\varphi(\Gamma + \Delta)$

γ) $\eta\mu \frac{A+B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma+\Delta}{2}$

δ) $\varepsilon\varphi \frac{A+\Gamma}{2} = -\varepsilon\varphi \frac{B+\Delta}{2}$

30. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της $\sigma\phi \frac{2\kappa\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.
31. Να σημειώσετε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιές λανθασμένες.
- α) Ισχύει $\eta\mu\{-[-(-x)]\} = -\eta\mu x$.
 - β) Για κάθε γωνία x ισχύει $-\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(-x)$.
 - γ) Για κάθε γωνία x ισχύει $-\eta\mu(\pi + x) = \eta\mu x$.
 - δ) Για κάθε γωνία x ισχύει $-(-\epsilon\phi x) = \epsilon\phi(\pi + x)$.
 - ε) Για οποιεσδήποτε γωνίες α, β ισχύει $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu(\beta - \alpha)$.
 - στ) Ισχύει $\epsilon\phi 1^\circ \cdot \epsilon\phi 89^\circ = 1$.
 - ζ) Αν $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε $\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$.
 - η) Για κάθε γωνία x ισχύει $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
 - θ) Για κάθε γωνία x ισχύει $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
 - ι) Αν A, B, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου τότε $\sigma\upsilon\nu(A + B + \Gamma) = -1$.
32. Να σημειώσετε ποιές από τις επόμενες προτάσεις είναι αληθείς :
- α) Ισχύει $\eta\mu(\pi + \theta) = \eta\mu(\theta - \pi)$.
 - β) Ισχύει $\sigma\phi\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \epsilon\phi\theta$.
 - γ) Ισχύει $\left|\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right| = |\sigma\upsilon\nu\alpha|$.
 - δ) Ισχύει $|\eta\mu(\pi + \theta)| = \eta\mu(\pi - \theta)$.
 - ε) Ισχύει $|\eta\mu(\pi \pm \theta)| \leq 1$.
 - στ) Για κάθε γωνία x ισχύει $\eta\mu(360^\circ + x) = \eta\mu(360^\circ - x)$.
 - ζ) Ισχύει $\eta\mu 635^\circ + \sigma\upsilon\nu 5^\circ = 0$.
 - η) Για κάθε γωνία x με $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ισχύει $\eta\mu|x| = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

33. Να σημειώσετε την σωστή απάντηση σε κάθε μια από τις επόμενες ερωτήσεις :

α) Η $\varepsilon\phi(-30^\circ)$ είναι ίση με :

A : $\varepsilon\phi 60^\circ$ B : $-\sigma\phi 60^\circ$ Γ : $\sigma\phi 30^\circ$ Δ : $-\varepsilon\phi 30^\circ$.

β) Το $\sigma\upsilon\nu 200^\circ$ είναι ίσο με :

A : $\sigma\upsilon\nu 20^\circ$ B : 20 Γ : $-\eta\mu 20^\circ$ Δ : $-\sigma\upsilon\nu 20^\circ$.

γ) Το $-\sigma\upsilon\nu(\theta + 90^\circ)$ είναι ίσο με :

A : $-\eta\mu\theta$ B : $\sigma\upsilon\nu\theta$ Γ : $-\sigma\upsilon\nu\theta$ Δ : $\eta\mu\theta$.

δ) Το $\eta\mu 360^\circ$ είναι ίσο με :

A : 1 B : $\sigma\upsilon\nu 0^\circ$ Γ : 0 Δ : $\eta\mu 0^\circ$.

ε) Η τιμή της παράστασης $\varepsilon\phi(-135^\circ) + \sigma\phi(315^\circ)$ είναι ίση με :

A : 1 B : 2 Γ : -1 Δ : 0 .

στ) Το $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ είναι ίσο με :

A : $\sigma\upsilon\nu x$ B : $\eta\mu x$ Γ : $-\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ Δ : $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

34. Στην πρώτη στήλη δίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί διαφόρων γωνιών και στη δεύτερη στήλη οι ίσοι προς αυτούς. Να συνδέσετε τους αριθμούς της πρώτης στήλης με τους ίσους τους της δεύτερης.

$\eta\mu\left(\frac{19\pi}{2} + \omega\right)$ $\varepsilon\phi\omega$

$\eta\mu(2\pi + \omega)$ $\sigma\upsilon\nu\omega$

$\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} + \omega\right)$ $\eta\mu\omega$

$\sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} - \omega\right)$ $-\sigma\upsilon\nu\omega$

$-\varepsilon\phi\omega$