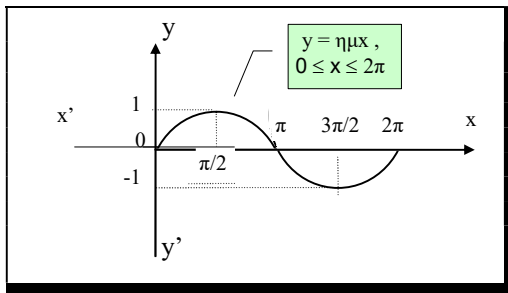




Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 4

ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ



1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$f(x) = \eta\mu x$$

$$g(x) = \frac{1}{4} \eta\mu x$$

$$h(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$t(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$$

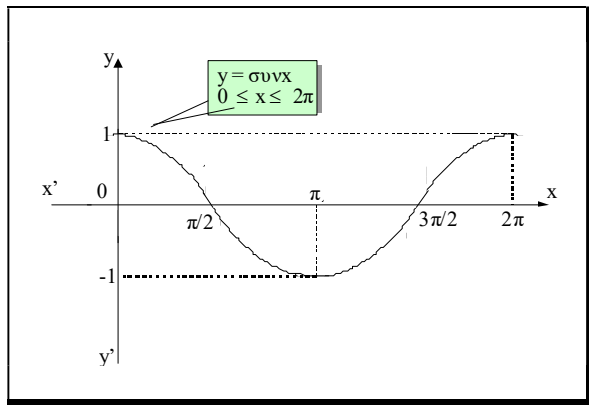
$$\mu\epsilon \ 0 \leq x \leq 2\pi.$$

2. Όμοια για τις συναρτήσεις :

$$f(x) = -4 \eta\mu x$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \eta\mu x$$

$$t(x) = \eta\mu 2x$$



3. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$g(x) = 5 + \eta\mu x \text{ και}$$

$$h(x) = \eta\mu x - 5, \ \mu\epsilon \ 0 \leq x \leq 2\pi.$$

4. Να υπολογίσετε τις περιόδους των παρακάτω συναρτήσεων :

$$f(x) = \eta\mu 3x$$

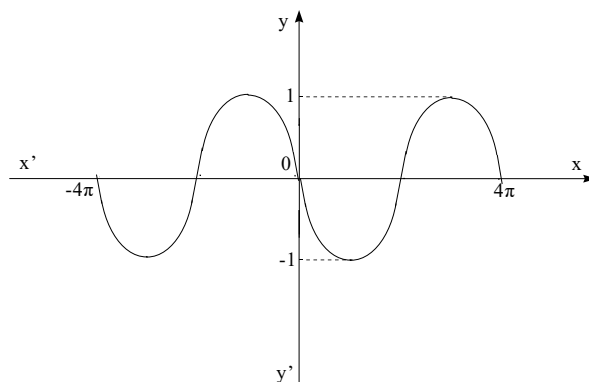
$$g(x) = \sigma\upsilon\nu \frac{1}{4} x$$

$$h(x) = 2\eta\mu x$$

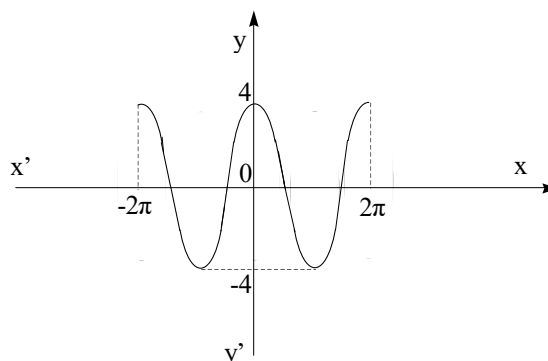
$$t(x) = \sigma\upsilon\nu \frac{x}{5}$$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 10\eta\mu\frac{x}{3}$. Ποιά είναι η μέγιστη και ποιά η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής ; Ποιά είναι η περίοδός της ; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 6\sigma\upsilon\nu\frac{x}{4}$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . Να βρεθεί η περίοδός της. Να γίνει η χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.
7. Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$.
8. Να βρείτε τον τύπο της τριγωνομετρικής συνάρτησης σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

(A)

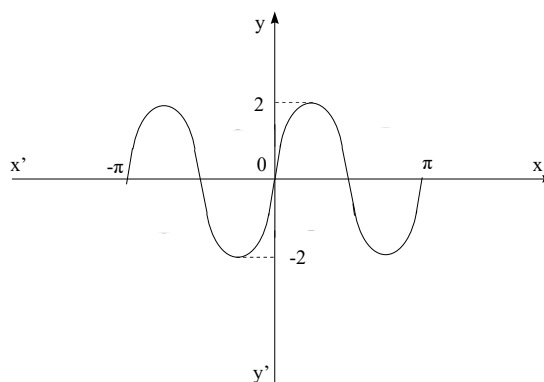


(B)

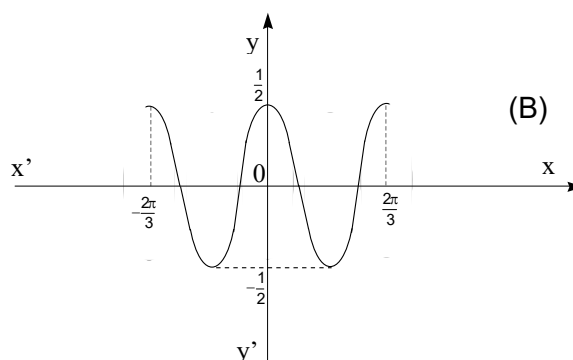


9. Να βρείτε το τύπο των τριγωνομετρικών συναρτήσεων των παρακάτω γραφικών παραστάσεων :

(A)



(B)



10. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \varepsilon\varphi x$,

β) $g(x) = \varepsilon\varphi x + 2$,

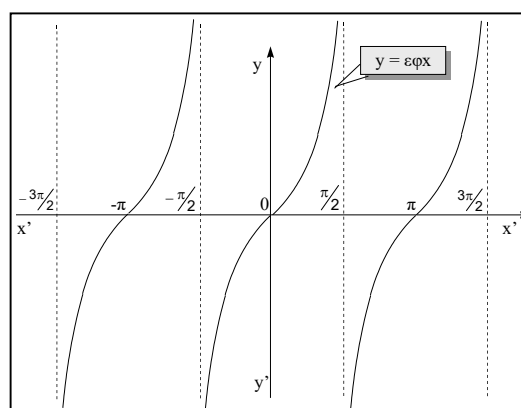
γ) $h(x) = 4 - \varepsilon\varphi x$,

για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Η συνάρτηση της εφαπτομένης, όπως και της συνεφαπτομένης μιας γωνίας ωx , έχει περίοδο T :

$$T = \frac{\pi}{\omega}, \quad \omega > 0$$



11. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \varepsilon\varphi \frac{x}{3}$.

12. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \varepsilon\phi x$

β) $g(x) = \sigma\phi x$

γ) $h(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

δ) $t(x) = \frac{1}{2\eta\mu x - 1}$

13. Η παράσταση $\frac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$ δεν ορίζεται όταν το x είναι ίσο με :

α) 0°

β) 45°

γ) 30°

δ) 60°

ε) 90°

στ) 180°

14. Να σημειώσετε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιές όχι. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, όταν $x \in [0, 2\pi]$, είναι περιττή.

β) Η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, όταν $x \in \mathbb{R}$, είναι άρτια.

γ) Η συνάρτηση $h(x) = \varepsilon\phi x$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\{x / \eta\mu x \neq 0\}$.

δ) Η συνάρτηση $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$, έχει ελάχιστη τιμή το -2 και μόνο αυτή.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu(-x)$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ταυτίζονται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

στ) Τα σημεία $A\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ και $B\left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

ζ) Η συνάρτηση $f(x) = -2\eta\mu x + 1$, έχει μέγιστη τιμή το 1 και ελάχιστη τιμή το -1 .

η) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$, με $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, δεν έχει ακρότατα.

θ) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(-2x)$ και η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu 2x$ έχουν την ίδια περίοδο.

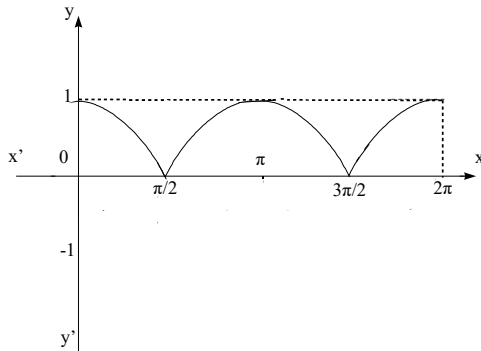
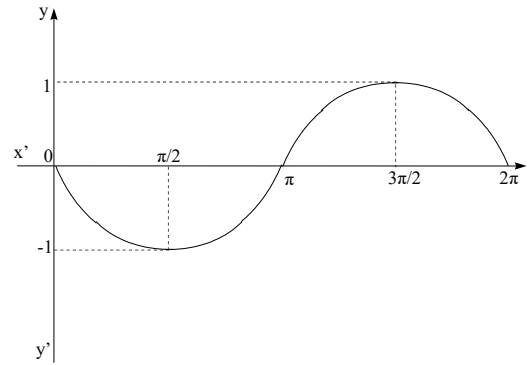
ι) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [0, \pi]$.

ια) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

15. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = -\eta\mu x$$

Η παραπάνω διαπίστωση είναι σωστή ή όχι;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



16. Να εξετάσετε ποιά από τις παρακάτω συναρτήσεις παριστάνεται στο διπλανό σχήμα:

$$f(x) = \eta\mu |x|$$

$$g(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$$

$$h(x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$t(x) = \sigma\upsilon\nu |x|$$

17. Να εξετάσετε ποιά από τις επόμενες συναρτήσεις, παριστάνεται στο διπλανό σχήμα :

$$f(x) = \eta\mu \frac{x}{2}$$

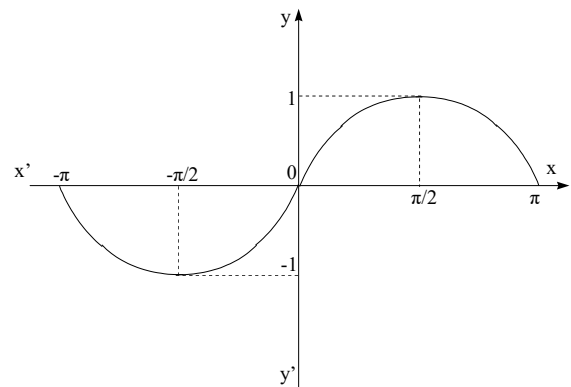
$$f(x) = -\eta\mu x$$

$$f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{2}$$

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$f(x) = \eta\mu x$$

$$f(x) = -\sigma\upsilon\nu x$$



18. Έστω η συνάρτηση $f(x) = |\eta\mu x| + \eta\mu x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

α) Για τις διάφορες τιμές του x να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

β) Να κάνετε την γραφική παράσταση της f , όταν $x \in [\pi, 2\pi]$.

19. Αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu\omega x$ έχει περίοδο $\frac{2\pi}{3}$, τότε το ω είναι ίσο με :

A : $1/3$

B : 2

Γ : 3

Δ : 6

E : $2/3$

20. Η συνάρτηση $f(x) = a\eta\mu\frac{x}{2} + \beta$ με $a > 0$ έχει μέγιστη τιμή 2 και ελάχιστη -4.

- α) Να υπολογίσετε τους a, β .
- β) Να βρείτε την περίοδο της f .
- γ) Να σχεδιάσετε την C_f για $-4\pi \leq x \leq 4\pi$.

21. Η συνάρτηση $f(x) = 4\kappa - 3 + \lambda\eta\mu\frac{x}{\kappa}$, $\lambda > 0$ έχει μέγιστη τιμή 7 και η γραφική παράστασή της τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 3.

- α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς κ, λ .
- β) Να υπολογίσετε και την ελάχιστη τιμή της f , καθώς και την περίοδό της.
- γ) Να βρείτε τη μονοτονία της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση για $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.

22. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 8x + \eta\mu x$, με $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

- α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- β) Να βρείτε τις ρίζες της f , στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- γ) Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της f .
- δ) Αν $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\alpha < \beta$ να δείξετε ότι $\alpha - \beta \leq \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{8}$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + x - 1$, με $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + x = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $\sigma\upsilon\nu x < 1 + x \sigma\upsilon\nu x$, στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.