



Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3ο - Φ Υ Λ Λ Ο Νο 5

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

β) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$

γ) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

δ) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ε) $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

στ) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ζ) $\eta\mu x + 1 = 0$

η) $\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\epsilon\phi x - 1 = 0$

β) $\sigma\phi x - 1 = 0$

γ) $\epsilon\phi x + 1 = 0$

δ) $\sigma\phi x + 1 = 0$

ε) $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$

στ) $\sigma\phi x = 0$

ζ) $\epsilon\phi x = 0$

η) $\epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

θ) $\epsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις :

α) $\eta\mu 2x = -\frac{1}{2}$

β) $\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

γ) $2\eta\mu x = \sqrt{3}$

δ) $\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu 2x = -1$

ε) $\sigma\upsilon\nu 2x = -1$

στ) $\eta\mu \frac{x}{2} = 0$

ζ) $2\eta\mu x = \sqrt{2}$

η) $\epsilon\phi(-x) = \sqrt{3}$

θ) $\eta\mu(-x) = 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Επίλυση βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων :

- $\eta\mu x = \eta\mu \theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \theta$
- $\epsilon\phi x = \epsilon\phi \theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$
- $\sigma\phi x = \sigma\phi \theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta$

* Στις παραπάνω σχέσεις το x είναι η άγνωστη γωνία, ενώ το θ είναι η γνωστή.

* Το $\kappa \in \mathbb{Z}$, δηλ. είναι ακέραιος.

4. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις :

α) $\eta\mu(3x - 2) = -1$

β) $\sigma\upsilon\nu(2x - 5) = 0$

γ) $\epsilon\varphi(2x + 3) = \sqrt{3}$

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $(2 - \eta\mu x)(2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}) = 0$

β) $(2\eta\mu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3}) = 0$

γ) $\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right)(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$

δ) $\sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x + 2) = 0$

ε) $\epsilon\varphi x(\epsilon\varphi^2 x - 1) = 0$

στ) $(\sigma\varphi x - 1)(\sqrt{3}\epsilon\varphi x + 1) = 0$

ζ) $(\sigma\varphi^2 x - 3)(2\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$

η) $\sigma\upsilon\nu x(4\sigma\upsilon\nu^2 x - 3)\epsilon\varphi x = 0$

6. Να λύσετε την εξίσωση : $(2x^2 - 3\pi x + \pi^2)\epsilon\varphi x = 0$.

7. Να λυθούν οι επόμενες εξισώσεις :

α) $\eta\mu 3x \sigma\upsilon\nu x = 0$

β) $\eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

γ) $2\eta\mu^2 x - \eta\mu x = 0$

δ) $\eta\mu^3 2x - \eta\mu 2x = 0$

ε) $\epsilon\varphi^3 x = \epsilon\varphi x$

στ) $\sigma\upsilon\nu x \sigma\varphi 2x = 0$

8. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

β) $\epsilon\varphi^3 x + \epsilon\varphi^2 x - 3\epsilon\varphi x - 3 = 0$

γ) $\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 0$

δ) $2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu 2x = \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu 2x$

ε) $\eta\mu x \epsilon\varphi x = \eta\mu x$

στ) $\eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x$

9. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις :

α) $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

β) $\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

γ) $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

δ) $2\eta\mu\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$

10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$

β) $\sqrt{3} - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

γ) $\epsilon\varphi\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3}$

δ) $\sqrt{3}\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) - 3 = 0$

ε) $\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}$

στ) $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{2\pi}{3}$

ζ) $\eta\mu 3x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

η) $\sigma\upsilon\nu(2x - \pi) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$

β) $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3} = \eta\mu(x - 1)$

γ) $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) + \sigma\upsilon\nu x = 0$

δ) $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{x}{5}$

ε) $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$

στ) $\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\left(5x - \frac{\pi}{6}\right)$

12. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $\epsilon\varphi 3x = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

β) $\epsilon\varphi\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

γ) $\epsilon\varphi\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 0$

δ) $\sigma\varphi 3x + \epsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

13. Να λυθούν οι επόμενες εξισώσεις :

α) $\epsilon\varphi x \cdot \epsilon\varphi 3x = 1$

β) $\epsilon\varphi 2x \cdot \epsilon\varphi 5x = 1$

γ) $\sigma\varphi x \cdot \sigma\varphi 2x = 1$

δ) $\epsilon\varphi 2x \cdot \epsilon\varphi x = 1$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν :

α) $2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 = 0$

β) $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 = -3\sigma\upsilon\nu x$

15. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις :

α) $3\eta\mu^2x + 4\sigma\upsilon\nu x = 3$

β) $6\eta\mu^2x = 5 - \sigma\upsilon\nu x$

γ) $2\eta\mu^2x - 3\sqrt{2}\eta\mu x + 2 = 0$

δ) $2\sigma\upsilon\nu^2x - 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

ε) $3\epsilon\varphi^2x - (3 + \sqrt{3})\epsilon\varphi x + \sqrt{3} = 0$

στ) $\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu^2x$

ζ) $\eta\mu^4x - \sigma\upsilon\nu^4x = \frac{1}{2}$

η) $\sigma\varphi^2x - \epsilon\varphi^2x = 0$

θ) $\eta\mu^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sigma\upsilon\nu^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

ι) $\sqrt{2}\epsilon\varphi x = 2\eta\mu x$

16. Να λύσετε την εξίσωση : $\epsilon\varphi x + \sigma\varphi x = \frac{3}{2}$.

17. Να λύσετε την εξίσωση : $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ στο διάστημα $[0, 2\pi)$.

18. Να λύσετε την εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ στο διάστημα $[2\pi, 4\pi]$

19. Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης : $2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, στο διάστημα $[0, 2\pi]$

20. Να λύσετε την εξίσωση : $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$, στο διάστημα $(-\pi, 3\pi]$.

21. Να λύσετε στο διάστημα $[-3\pi, 2\pi)$, την εξίσωση : $2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{4} + \sqrt{2} = 0$.

22. Να λυθεί στο διάστημα $(-\pi, 3\pi)$, η εξίσωση : $\frac{2\epsilon\varphi x}{1 + \epsilon\varphi x} = 1$.

23. Αν ισχύει $\eta\mu\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, τότε :

α) να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}$,

β) να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

24. Να σημειώσετε σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις έχουμε αληθείς προτάσεις και σε ποιές όχι. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Η συνάρτηση $\sigma\phi x$ ορίζεται στο σύνολο $\{x / x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

β) Η συνάρτηση $\epsilon\phi x$ ορίζεται στο σύνολο $\{x / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

γ) Η εξίσωση $\epsilon\phi x = 1$ έχει λύση που δίνεται από τον τύπο $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

δ) Ισχύει ότι : $\epsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

ε) Η εξίσωση $3\eta\mu x = 4$ είναι αδύνατη.

στ) Η εξίσωση $\epsilon\phi x = \alpha$, έχει λύση για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

ζ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει η ισοδυναμία $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x$.

η) Ισχύει $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

θ) Η εξίσωση $\eta\mu\pi x = 0$, έχει λύσεις όλους τους ακέραιους αριθμούς.

ι) Ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\pi x = 0 \Leftrightarrow x = k \pm \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

ια) Η εξίσωση $\frac{4}{\eta\mu^2 x} - 1 = 0$, είναι αδύνατη.

ιβ) Η εξίσωση $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 1$, είναι αδύνατη.

ιγ) Η εξίσωση $\eta\mu 3x = \frac{\pi}{3}$, δεν έχει λύση.

25. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \epsilon\phi(x - 3)\sigma\phi \frac{x}{2}$.

26. Να λύσετε την εξίσωση $\lambda\epsilon\phi x + \mu\sigma\phi x = 1 + \sqrt{3}$, αν γνωρίζουμε ότι οι γωνίες $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ rad είναι λύσεις της.

27. Αν $k \in \mathbb{Z}$, δείξτε ότι οι τιμές της παράστασης $\sigma\upsilon\nu \frac{k\pi}{\sqrt{3}}$ είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους.

28. Να λυθεί στο διάστημα $[-\pi, \pi)$, η εξίσωση : $\sigma\phi x (\sqrt{3} + 3\sigma\phi x) = 3\sqrt{3}\sigma\phi x + 3$.