



3ο ΘΕΜΑ

1.

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Γ1. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντες τα πολυώνυμα $x - 1$ και $x - 2$, να υπολογίσετε τα α, β .

Μονάδες 10

Γ2. Αν $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 8

Γ3. Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{x-1}$

Μονάδες 7

2.

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$.

Γ1. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

Μονάδες 8

Γ2. Δείξτε ότι $A = 1 + \sigma\upsilon\nu x$, για $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Μονάδες 8

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 9

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - e}{e^x + e}\right)$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 8

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \ln 2 = 0$.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$, για κάθε $x > 1$.

Μονάδες 7

4.

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \sin\theta \cdot x - \eta\mu\theta \cdot y = 1 \\ \eta\mu\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y = 0 \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}.$

- Γ1.** Να δείξετε ότι το παραπάνω σύστημα έχει πάντοτε μοναδική λύση ,
για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, (μονάδες 5), την οποία και να υπολογίσετε (μονάδες 5).

Μονάδες 10

- Γ2.** Να δείξετε ότι η μοναδική λύση ικανοποιεί την ισότητα $x^2 + y^2 = 1$.

Μονάδες 5

- Γ3.** Να υπολογίσετε τις τιμές του $\theta \in [0, 3\pi]$, ώστε η μοναδική λύση του
συστήματος να είναι $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Μονάδες 10

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha+2}{1-\alpha}\right)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$ η
συνάρτηση f :

- Γ1.** έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$,

Μονάδες 8

- Γ2.** είναι εκθετική ,

Μονάδες 5

- Γ3.** i) είναι γνησίως αύξουσα , (μονάδες 6)

- ii) για $\alpha = 0$, να χαράξετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές
παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , όπου $g(x) = f(x) + 2$.
(μονάδες 6)

Μονάδες 12