

Λύσεις

1) Γ1. Αν το $P(x)$ έχει ρίζες το $x=1$ τότε
 $P(1)=0 \Leftrightarrow 1 - 2 + \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$, (1)
 Ομοίως αν το $P(x)$ έχει ρίζες το $x=2$,
 τότε $P(2)=0 \Leftrightarrow 8 - 8 + 2\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 0$ (2).

Από (1), (2) έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -2\alpha - \beta = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

4) r2. Für $a = -1$ oder $\beta = 2$ gilt

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \vee x^2-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{x=2} \vee x^2=1 \Leftrightarrow$$

$$|x|=1 \Leftrightarrow \underline{x=1} \vee \underline{x=-1}$$

Also ist $p(x)$ zu $g(x)$ gleich null:

$$x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$$

(2. Schritt) für x ist $p(x)$ Höheres als $g(x)$ ist
 nicht anzuwenden $p(x) \in \{\pm 1, \pm 2\}$ oder $g(x)$ ist
 Simplex, was $a_0 = 2$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 2 \end{array} \quad \underline{4p=1}$$

$$\begin{array}{cccc} \approx & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 10 \end{array}$$

$$\text{Daher } p(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \vee x^2-x-2=0$$

$$\underline{x=1} \vee \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\underline{x_2 = 2} \vee \underline{x_3 = -1}$$

1) r3. Da es sich nicht um ein Intervall handelt, gilt:

$$f(x) = \frac{\sqrt{p(x)}}{x-1}, \quad p(x) \geq 0$$

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2-1) \geq 0, (3) \\ x \neq 1 \end{cases} \quad (4)$$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x-2$		-	-	-	+
x^2-1	+	0	-	0	+
$p(x)$	-	0	+	0	+

Appl. $p(x) \geq 0$ ist

$$x \in [-1, 1] \cup [2, +\infty)$$

und aus (4) $x \neq 1$

$$\text{Appl. } A_F = \underline{[-1, 1) \cup [2, +\infty)}$$

2) Γ1. Για να ορίσουμε η Α η σχέση:

$$1 - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow \sin x \neq \sin 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2k\pi \pm 0, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{άρα}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\Gamma 2. \quad \text{Είμεν} \quad A = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} =$$

$$= \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 - \sin x} = 1 + \sin x, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Gamma 3. \quad \text{Η εξίσωση προέχει} \quad A = \frac{1}{2} \quad \text{Γ2.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \vee \quad x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta \epsilon \text{φεί} \quad \text{όχι} \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \Gamma_1. \text{ Πρόκληση } \begin{cases} \frac{e^x - e}{e^x + e} > 0 \\ e^x + e \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - e > 0 & \text{αφ' } e^x + 0 > 0 \\ & \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ e^x + e \neq 0, \text{ ισχύει} \\ \text{αφ' } e^x + e > 0 & \\ & \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x > e \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{αφ' } y = e^x \uparrow \text{ } \end{cases}$$

$$A_{\text{pr}} \quad A_f = (1, +\infty).$$

$$\Gamma_2. f(x) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{e^x - e}{e^x + e} \right) = -\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{e^x - e}{e^x + e} \right) = \ln 2^{-1} \Leftrightarrow \frac{e^x - e}{e^x + e} = \frac{1}{2} \quad \left| \begin{array}{l} y = \ln x \\ \text{για} \\ 1 < x \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow 2e^x - 2e = e^x + e \Leftrightarrow e^x = 3e \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} e^x > 0 \\ 3e > 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \ln e^x = \ln(3e) \quad x = \ln 3 + \ln e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = \ln 3 + 1 \\ \text{Μονωτονία } y = e^x \end{array} \right. \quad \text{Setw' } \text{αφ' } x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln 3 + 1 > 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln 3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln 3 > \ln 1 \quad \left[y = \ln x \uparrow \right]$$

$$\Gamma_3. \text{ Είμεν } f(x) < 0 \Leftrightarrow \left\{ \ln \left(\frac{e^x - e}{e^x + e} \right) < \ln 1 \right\} \quad \left| \begin{array}{l} \text{για } y = \ln x \\ \text{αφ' } e^x - e < e^x + e \\ -e < e \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x - e) - \ln(e^x + e) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x - e) < \ln(e^x + e) \Leftrightarrow e^x - e < e^x + e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -e < e \quad \text{ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ άρα για } x > 1$$

4) Γ1. Ισχύει ότι $-1 \leq \cos \frac{x}{2} \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$-a \leq a \cos \frac{x}{2} \leq a, \quad \text{για } a > 0$$

$$-a + \beta \leq a \cos \frac{x}{2} + \beta \leq a + \beta$$

$$-a + \beta \leq f(x) \leq a + \beta.$$

Η ελάχιστη τιμή $m = -4$ είναι $-a + \beta = -4$, (1)

και η μέγιστη τιμή $M = 2$ είναι $a + \beta = 2$, (2)

Αν (1), (2) προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} -a + \beta = -4 \\ a + \beta = 2 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} -a + \beta = -4 \\ 2\beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 1 = -4 \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Γ2. Η $f(x) = 3 \cos \frac{x}{2} - 1$

Γνωρίζουμε ότι η περίοδος $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

για ωf έχουμε $\omega = \frac{1}{2}$,

$$\text{άρα } T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

4) Γ3. Για τη γραφική παράσταση της f
 έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-4η	-3η	-2η	$-\eta$	0	η	2η	3η	4η
$f(x)$	-1	2	-1	-4	-1	2	-1	-4	-1

(α)

αφ' ου για $x = -4\eta$, $f(-4\eta) = 3\psi(-2\eta) - 1 = -1$

$x = -3\eta$, $f(-3\eta) = 3\psi(-\frac{3\eta}{2}) - 1 = -3(-1) - 1 = 2$

$x = -2\eta$, $f(-2\eta) = 3\psi(-\eta) - 1 = -1$

$x = -\eta$, $f(-\eta) = 3\psi(-\frac{\eta}{2}) - 1 = -3 \cdot 1 - 1 = -4$

$x = 0$, $f(0) = 3\psi 0 - 1 = -1$

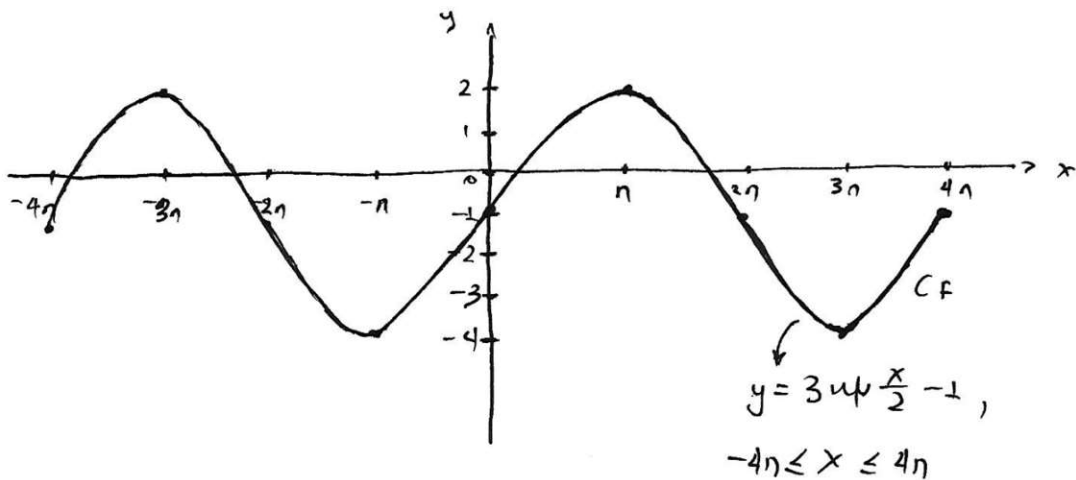
$x = \eta$, $f(\eta) = 3\psi \frac{\eta}{2} - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$

$x = 2\eta$, $f(2\eta) = 3\psi \frac{2\eta}{2} - 1 = -1$

$x = 3\eta$, $f(3\eta) = 3\psi \frac{3\eta}{2} - 1 = 3 \cdot (-1) - 1 = -4$

$x = 4\eta$, $f(4\eta) = 3\psi 2\eta - 1 = -1$

Ορίζεται από τον πίνακα (α) η συνάρτηση $y = f$:



5) Γ1. Για $a \neq 1$ και a, f να είναι $A_f = 1/2$,

$$\text{πρέπει } \frac{a+2}{1-a} > 0 \Leftrightarrow (a+2)(1-a) > 0, a \neq 1$$

οι αντιστοίχες ρίζες είναι $a = -2, a = 1$

a	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$a+2$	$-$	0	$+$	$+$
$1-a$	$+$	$+$	0	$-$
Π.ν.	$-$	0	$+$	$-$

$$\text{άρα } \frac{a+2}{1-a} > 0 \text{ όταν}$$

$$a \in (-2, 1)$$

$$\text{και } A_f = 1/2$$

Γ2. Για να είναι a, f ελκυστική απάντη

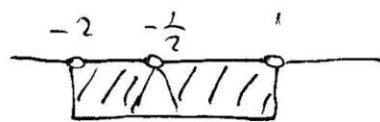
$$\frac{a+2}{1-a} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{a+2}{1-a} \neq 1 \quad (2)$$

$$H (1) \Leftrightarrow a \in (-2, 1) \text{ και } (2) \quad a+2 \neq 1-a \Leftrightarrow$$

$$2a \neq -2 \Leftrightarrow$$

$$a \neq -\frac{1}{2}$$

άρα από (1) & (2)



$$a \in (-2, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$$

για να είναι a, f ελκυστική απάντη.

5) Γ3. 1) Για να είναι η f γνησίως αύξουσα

$$\text{ηπόθεση} \quad \frac{a+2}{1-a} > 1 \Leftrightarrow \frac{a+2}{1-a} - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+2 - (1-a)}{1-a} > 0 \Leftrightarrow \frac{a+2-1+a}{1-a} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+1}{1-a} > 0 \quad \text{και} \quad a \in (-2, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1) \\ \text{από } \Gamma 2,$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)(1-a) > 0$$

Οι ρίζες της αλγ. εως της εξίσωσης είναι

$$a = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad a = 1$$

a	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2a+1$	-	0	+	+
$1-a$	+	+	0	-
$\Pi.v.$	-	0	+	0

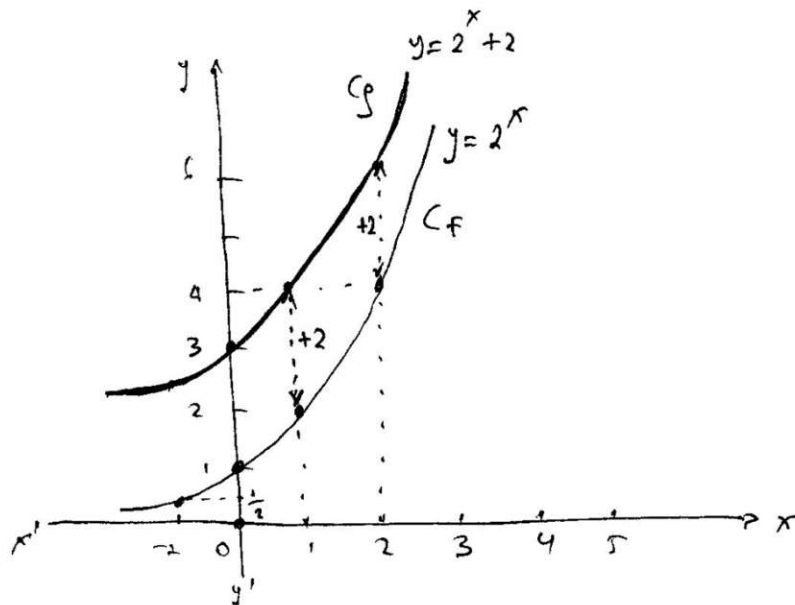
$$\text{άρα} \quad (2a+1)(1-a) > 0 \quad \text{όταν} \quad a \in (-\frac{1}{2}, 1)$$

5) Γ3. α) Για $q = 0$

είναι $f(x) = 2^x$ και $g(x) = 2 + f(x)$
 $= 2 + 2^x$

Για την C_f

x	0	1	2	$-\frac{1}{2}$
$f(x)$	1	2	4	$\frac{1}{2}$



Η C_g προκύπτει από την μετατόπιση
 προς τα πάνω με το ίδιο C_f κατά
 2 μονάδες