

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
ΕΥΘΕΙΕΣ
ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

1η επαναληπτική εργασία



2ο – 3ο – 4ο ΘΕΜΑ

1. (2ο/2013)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{3}$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

B1. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

Μονάδες 15

B2. Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = 3\sqrt{7}$.

Μονάδες 10

2. (3ο/2013)

Δίνεται η εξίσωση $(1 - 2\lambda)x + (\lambda + 1)y = 1 - 8\lambda$, (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο M, του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του.

Μονάδες 10

Γ3. Αν είναι $M(3, -2)$ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB με A, B να είναι τα σημεία τομής της (1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι

$$\lambda = \frac{5}{4}.$$

Μονάδες 10

3. (2ο/2014)

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων, οι τετμημένες δύο σημείων $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ με $x_1 < x_2$, είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $x^2 - (\lambda^2 - 4\lambda + 3)x + 12 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

B1. Βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το μέσο M του AB να έχει τετμημένη 4.

Μονάδες 10

B2. Αν ισχύει ότι $\lambda = 5$, $y_2 = y_1 + 3$ και $\vec{\Gamma\Delta} = (-3, \mu^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, τότε :

i) να βρεθεί το $|\vec{AB}|$.

Μονάδες 8

ii) να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε $\vec{AB} \perp \vec{\Gamma\Delta}$.

Μονάδες 7

4. (4ο/2013)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 8\lambda^2 x - 8\lambda y + 16\lambda^2 (\lambda^2 + 1) = 5$, (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλους για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
Μονάδες 10

Δ2. Να δείξετε ότι δύο μόνο από τους κύκλους της εξίσωσης (1), διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
Μονάδες 5

Δ3. Για $\lambda = \frac{1}{2}$, να δείξετε ότι η ελάχιστη απόσταση d του σημείου $\Lambda(1, -2)$ από τον κύκλο της εξίσωσης (1) είναι $d = \sqrt{5}$.
Μονάδες 5

Δ4. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων της εξίσωσης (1), για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι παραβολή, της οποίας να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ .
Μονάδες 5

5. (3ο/2014)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4ax - 2(a+2)y + 4a^2 + 4a + 4 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. (1)

Γ1. Δείξτε ότι για $a \neq 0$, η (1) εκφράζει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ .
Μονάδες 10

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα των κύκλων.
Μονάδες 7

Γ3. Να εξετάσετε αν υπάρχει κύκλος (C), της (1), ο οποίος εφάπτεται στον άξονα $x'x$ ή στον $y'y$ και να βρεθεί.
Μονάδες 8

6. (4ο/2014)

Σε σημείο M της παραβολής $C: y^2 = 2px$, με $p > 0$, φέρνουμε την εφαπτομένη ευθεία (ϵ_M) της C . Έστω επίσης η χορδή AB της παραβολής που διέρχεται από την εστία E της παραβολής C και είναι παράλληλη της (ϵ_M) . Έστω επίσης K η ορθή προβολή του M στη διευθετούσα δ . (Θεωρούμε το σημείο M διαφορετικό της κορυφής $O(0, 0)$ της C)

Δ1. Να δείξετε ότι το M και το μέσο N του AB έχουν ίσες τεταγμένες.
Μονάδες 10

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $(AB) = 4 (ME)$.
Μονάδες 10

Δ3. Να δείξετε ότι: $(KN) = 2 (KM)$.
Μονάδες 5

7. (2ο/2016)

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δίνεται ότι

$$|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}, \quad \angle(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}.$$

B1. Να υπολογίσετε:

i. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

ii. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$, όπου $\vec{\gamma} = \vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$.

Μονάδες (5+6)

B2. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = |\vec{\beta}|$.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

Μονάδες 7

8. (3ο/2016)

Δίνεται η ευθεία (ε) : $3x + y + \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$.

Γ1. Αν η απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) είναι ίση με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, να βρεθεί ο αριθμός α.

Μονάδες 8

Γ2. Για $\alpha = 4$, να βρείτε:

- το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ, όπου Γ είναι το σημείο που η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα yy'.
- την εξίσωση ευθείας (ζ) που είναι κάθετη στην (ε) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- το σημείο της ευθείας (ε) που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες (7+5+5)

9. (3ο/2015)

Δίνονται οι εξισώσεις: $(\alpha - 1)x + (\alpha + 1)y - 2\alpha = 0$ (1)

$$x^2 + 2x + y^2 = 0$$
 (2)

Γ1. Δείξτε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ2. Δείξτε ότι η παραπάνω οικογένεια ευθειών (1) διέρχεται από σταθερό σημείο M του οποίου βρείτε τις συντεταγμένες.

Μονάδες 6

Γ3. Δείξτε ότι η εξίσωση (2) παριστάνει κύκλο στον οποίο εφάπτονται η ευθεία $y = 1$ και ο άξονας yy'.

Μονάδες 8

Γ4. Βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση του σημείου $M(1, 1)$ από τον κύκλο (2).

Μονάδες 6

10. (4ο/2016)

Δίνεται η εξίσωση

$$C_K: x^2 + y^2 + 4x - 6y + \kappa = 0, \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε η C_K να παριστάνει κύκλο.

Μονάδες 5

Δ2. Για $\kappa = -3$

- i. να βρεθεί το κέντρο K και η ακτίνα ρ του κύκλου
- ii. δείξτε ότι το σημείο $A(-4, 4)$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου
- iii. βρείτε την εξίσωση της χορδής που έχει μέσο το $A(-4, 4)$
- iv. βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $\Lambda(4, 3)$ και εφάπτεται εξωτερικά στον παραπάνω κύκλο (K, ρ) .

Μονάδες (6+4+5+5)

11. (2ο/2015)

Θεωρούμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$ και $\Gamma(2, -1)$.

B1. Βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

Μονάδες 5

B2. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB .

Μονάδες 7

B3. Βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

Μονάδες 6

B4. Δείξτε ότι $AB \perp A\Gamma$.

Μονάδες 7

12. (4ο/2012)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda^2 x - 2\lambda y + 3\lambda^3 = 0$ (1).

Δ1. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει κύκλο;

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε μια παραβολή της οποίας να βρείτε την εστία και την εξίσωση της διευθετούσας.

Μονάδες 7

Δ3. Αν $\lambda=1$ αποδείξτε ότι η ευθεία $x+y=5$ (ϵ_1) εφάπτεται του κύκλου (1).

Μονάδες 5

Δ4. Βρείτε τα σημεία τομής του κύκλου (1) του Δ3) ερωτήματος με τον $x\chi'$, και γ'αυτό με την μικρότερη τετμημένη δείξτε ότι η εφαπτομένη (ϵ_2) του κύκλου σ'αυτό το σημείο είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ_1).

Μονάδες 6